

MATHEMATIQUES

NB : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.

EXERCICE N° 1 (4 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est juste. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie en justifiant le choix :

- 1) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :
- a. $M^2 = M$ b. $M^2 = I_2$ c. $M^2 = -M$
- 2) Si M est une matrice carrée d'ordre 3 tel que $M^3 = M + I_3$, alors $M^{-1} =$
- a. $M^3 - M$ b. $M^2 - M$ c. $M^2 - I_3$
- 3) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$; où α est un réel. Alors :
- a. A est inversible pour toute valeur de α .
 b. A n'est pas inversible pour exactement une valeur de α .
 c. A n'est pas inversible pour exactement deux valeurs de α .
- 4) Si f est une fonction définie sur $[1, +\infty[$ vérifiant $9 - 3x^2 \leq x^2 f(x) \leq 11 - 3x^2$, alors
- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

EXERCICE N° 2 (4 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{10(x - \sqrt{x})}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ \lambda & \text{si } x = 1 \end{cases}$, où λ est un réel.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) a) Vérifier que $x^3 + 2x - 3 = (x-1).(x^2 + x + 3)$ et que $\frac{10(x - \sqrt{x})}{x - 1} = \frac{10\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

b) En déduire que f admet une limite en 1 et déterminer cette limite.

3) a) Si on prend $\lambda = 10$, f est elle continue en 1 ?

b) Que doit être la valeur de λ pour que f soit continue en 1 ?

4) Vérifier que pour tout $x > 1$, $f(x) = 10 - \frac{10}{\sqrt{x} + 1}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

EXERCICE N° 3 (6 pts)

On donne ci-contre la courbe ζ d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$.

-I- Par une lecture graphique :

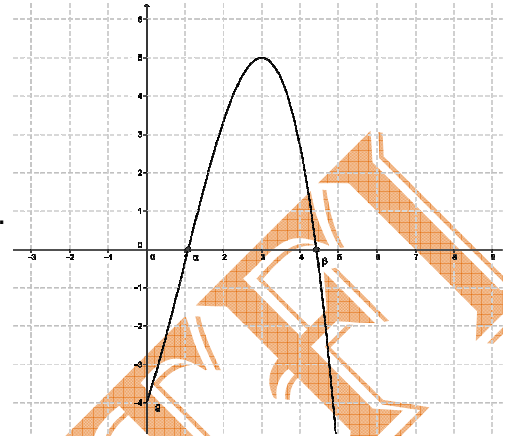
- 1) Donner $f(0)$.
- 2) Décrire les variations de f .
- 3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
- 4) Déterminer le réel x_0 où f atteint sa valeur maximale et déterminer cette valeur maximale.

-II- La fonction f est définie par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 4$.

Une petite entreprise fabrique chaque mois x milliers d'objets et $f(x)$ modélise le bénéfice algébrique mensuel en milliers de dinars réalisé par l'entreprise .

(bénéfice = revenu – coût de fabrication – coût fixe)

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Justifier la continuité de f sur $[0 ; +\infty[$.
- 3) Montrer par le calcul que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α dans $[1,2]$ et β dans $[4,5]$.
- 4) a) Déterminer le coût fixe en dinars.
b) Déterminer le nombre d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal.
- 5) On donne $\alpha \approx 1,0833$ et $\beta \approx 4,4216$.
 - a) Déterminer le nombre d'objets minimal que l'entreprise doit fabriquer pour qu'elle commence à réaliser un gain.
 - b) Déterminer le nombre d'objets maximal que l'entreprise doit fabriquer pour qu'elle évite la perte.



EXERCICE N° 4 (6 pts)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix}$ où m est un réel.

- 1) Montrer que le déterminant de M est $-2(m-2)^2$. En déduire les valeurs de m pour lesquels M est inversible.

- 2) Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer la valeur de m pour laquelle on a $M.N = 2.I_3$.

- 3) Dans toute la suite , on prend $m = 1$.

- a) Calculer la matrice $M.N$.

- b) En déduire la matrice M^{-1} inverse de M . Quelle est la matrice inverse de N ?

4) Un hôtel pratique trois tarifs différents pour un séjour de 24 heures :

- Le tarif x pour les enfants de moins de 12 ans.
- Le tarif y pour les enfants de 12 ans à 18 ans.
- Le tarif z pour les personnes de plus de 18 ans.

Trois familles ont passé un séjour de 24 heures dans cet hôtel.

- La famille Foulén, formée du père, de la mère et de 3 enfants d'âges 7, 10 et 15 ans ont payé 200 dinars.
- La famille Falten, formée du père, de la mère et de 5 enfants d'âges 4, 8, 13, 15 et 19 ans ont payé 290 dinars.
- La famille Leflen, formée de la mère et de 2 enfants d'âges 13 et 16 ans, ont payé 130 dinars.

a) Traduire la situation précédente en un système d'équations (S).

b) Donner l'écriture matricielle de (S).

c) Déterminer les trois tarifs x , y et z .