| | | |
|---|---|---|
| **L. Mateur**<br>**A.S : 2020-2021**<br>**Classe : 4ème Maths 2** | **Mr :Amri**<br>***Devoir de Contrôle N°1*** *(En mathématiques)* | |
| | Le 25 – 11- 2020 | Durée : 2heures |

***N.B : Le sujet comporte 3 pages***
***La calculatrice est autorisée et elle est personnelle***
***IL sera tenu compte de la bonne rédaction et de la présentation de la copie***

## Exercice N°1 :(4points)

Dans la figure ci- dessous on a représenté la courbe d'une fonction f dérivable sur IR dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ .On sait que $C_f$ admet : ∗ Une asymptote Δ : y= -1 au voisinage de –∞

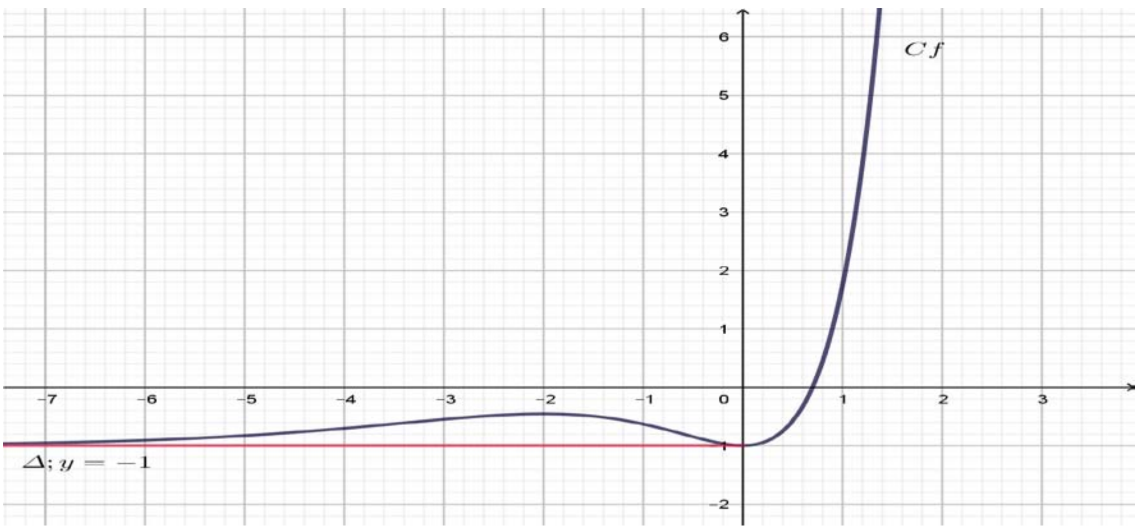
∗ Une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$ au voisinage de +∞

Utiliser le graphique et des renseignements fournis pour rependre en justifiant

1) Calculer ;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)+1}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)\ ;\ \lim_{x\to0^-}\tan\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{f(x)}{f\circ f(x)}\right)$$

2) a) Montrer que f(x)=0 admet une unique solution a dans IR
   b) Donner un encadrement de a à l'unité
3) Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{1}{f(\sqrt{x})}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de h
   b) Etudier les branches infinies de h et dresser son tableau de variation
   c) Construire la courbe de h dans repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (on prendra a=0,7)



## Exercice N°2:(5points)

1) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si \quad x \prec 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & si \quad x \succ 0 \end{cases}$

2) a) Montrer que $\forall \ x > 0$ ; $|f(x)| < x^3$

   b) En déduire que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On note F son prolongement

2) a) Montrer que $f$ est continue sur $]0\ ;+\infty[$

   b) Montrer que l'équation $\sin(\frac{\pi}{x}) = \frac{x^2+1}{x^3}$ admet au moins une solution dans [1 ;2]

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ . Interpréter les résultats obtenus

4) Montrer que la fonction $x \mapsto f\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}\right)$ est continue sur $]-\infty; 1[$

5) Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction g continue sur IR tel que g(0)= 2 et g(2) = 0

| x | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g(x) | 0 ↗ | 3 | ↘ $-\infty$ |

a) Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g \circ f(x)$

b) Montrer que Fo$g$(x) = $\frac{4}{5}$ admet au moins une solution $\alpha \in [0; 2]$

## Exercice N°3:(5points)

Soit $(U_n)$ la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_n = \dfrac{3+U_n^2}{1+U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall$ n $\in$ IN ; $U_n > 0$

c) Montrer que $(U_n)$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite .

2) a) Montrer que $\forall$ n $\in$ IN ; $U_{n+1} - 3 \leq \frac{4}{5}(U_n - 3)$

b) En déduire $\forall$ n $\in$ IN ; $U_n - 3 \leq (\frac{4}{5})^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} U_k$

a) Montrer que $\forall$ n $\in$ IN ; $3 + \frac{3}{n} \leq S_n \leq 3 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n}(1 - (\frac{4}{5})^{n+1})$

b) En déduire la limite de $S_n$ *et* la limite de $\frac{S_n}{n!}$

## Exercice N°4:(6points)

Le plan complexe rapporte a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ On considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = e^{i\theta}$ et $Z_B = e^{-i\theta}$ où $\theta \in ]\, 0; \frac{\pi}{2}[$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associée le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{Z^2-1}{2Z-2cos\theta}$ où $Z \neq \cos\theta$

1) Montrer que la droite $(O ;\vec{u})$ est globalement invariante par f
2) a) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E) : $Z^2 - 2cos\theta Z + 1 = 0$
   b) Résoudre l'équation (E)

3) a) Montrer que pour tout $Z \neq \cos\theta$ et $Z \neq e^{-i\theta}$ on a $\frac{Z' - e^{i\theta}}{Z' - e^{-i\theta}} = (\frac{Z - e^{i\theta}}{Z - e^{-i\theta}})^2$

b) En déduire que si M $\neq$ A et M $\neq$B on a : $\frac{M'A}{M'B} = (\frac{MA}{MB})^2$ et que $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A}) \equiv 2(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})[2\pi]$

4) a) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] privée de A et B

b) Le cercle $\mathcal{C}$ coupe la droite $(O ;\vec{u})$ en E et F . Montrer E et F ont la même image par f que l'on précisera

5) Dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$ Déterminer et construire l'ensemble des point M du plan vérifiant $\arg(\frac{2Z-1-i\sqrt{3}}{2Z-1+i\sqrt{3}})^3 \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

**BON TRAVAIL**