Lycée Secondaire M. Bourguiba	DEVOIR DE CONTROLE N° 1	Prof : Haouati Chokri	
Date: 23/11/2020	MATHEMATIQUES	4M	Durée : 2h

Exercice N°1(3points)

Le graphique ci-dessous (C) est la representation graphique d'une fonction f définie sur IR\{2}

(C) admet au voisinage $-\infty$ de une asymptote horizentale d'équation y= -1et une asymptote verticale d'équation x=2 et une asymptote oblique D :y=x-1

1) Calculer les limites suivantes

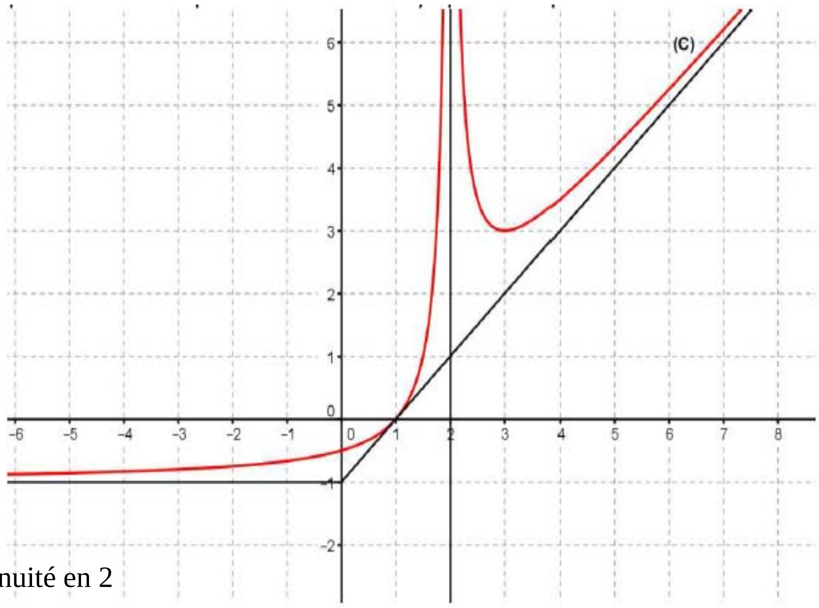
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)+1}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-x+3}\qquad\lim_{x\to2}\frac{f\circ f(x)}{f(x)}$$

2) Soit g la fonction définie par g(x)= $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Déterminer le domaine de définition de $g\circ f$

b) Montrer que $g\circ f$ est prolongeable par continuité en 2



Exercice N°2(8points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère l'application f de P dans P qui a tout point M(z)associe le point M' (z') tel que $z'=e^{i|z|}z$

1) a) Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives par f du point A d'affixe $\frac{\pi}{2}$ et de B (π)

b) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tel que $|z'|=1$

2) a) Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement s'il existe k $\in Z$ tel que OM =2kπ

b) En déduire l'ensemble F des points invariant par f

3) Soit dans C l'équation (E) : $z^3=e^{i|z|}z$

a) Montrer que si z est solution de (E) alors $|z|=0\ ou\ |z|=1$

b) Montrer que si z non nul solution de (E) alors $\arg(z)=\frac{1}{2}+k\pi\ ,\ k\in Z$

c) Déduire les solutions de (E)

4) Soit C d'affixe $1+i\sqrt{3}$ et Δ la demi droite d'origine O passant par C et ne contenant pas le point O

a) Montrer qu'un point M appartient a Δ si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) Soit M(z) un point de Δ et M'(z') son image par f

Montrer que M et M' sont symétriques par rapport a $(O,\vec{u})$ si et seulement s'il existe $n \in IN^*$ tel que $|z| = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$

5) Pour tout $k \in IN^*$, on note C_k le cercle de centre O et de rayon $2k\pi$

D_k la couronne délimitée par les cercles C_k et C_{k+1} et U_k l'aire de la couronne D_k

a) Montrer que $U_k = \pi^3(8k+4)$

b) Calculer la limite de la suite (Sn) définie sur IN * par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

6) Soit k $\in IN^*$. Montrer qu'un point M(z) appartient a $\Delta \cap D_k$ et est symétrique avec son image par rapport a (O, $\vec{u}$) si et seulement si $z = 2\pi(k+\frac{2}{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

<u>Exercice N°3(9points)</u>

Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{2}$

1) Montrer que $\forall n \in IN^*, 0 < u_n < 1$
2) Montrer que (u_n) est décroissante et convergente puis déterminer sa limite
3) Soit la suite (v_n) définie sur IN^* par $v_n = n.u_n$
   a) Montrer que $\forall n \in IN^*, v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{2}(\frac{2}{n+1} - u_n)u_n$
   b) Montrer que $\forall n \in IN^*, u_n < \frac{2}{n+1}$
   c) En déduire que (v_n) est convergente, on note l sa limite
4) Soit pour tout n $\in IN^*$, $w_n = \frac{1}{2-u_n}$ et $H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$
   a) Montrer que (w_n) est décroissante
   b) Vérifier que $\forall n \in IN^*, w_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$
   c) En déduire que $H_n = \frac{n+1}{nv_{n+1}} - \frac{1}{nu_1}$
   d) Vérifier alors que $\lim_{n\to+\infty} H_n = \frac{1}{l}$
   e) Montrer que $\forall n \in IN^*, w_{2n} < 2H_{2n} - H_n < w_{n+1}$
   f) En déduire que l=2