Lycée NasrallahClasse : 4^{eme}Sc& Tech Prof: Ben Taieb Lotfi	Série Révision Maths 2020/2021

Exercice1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\hat{u},\hat{v})$.

On considère les nombres complexes $a = \sqrt{3}+ i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$

1. Mettre a et b sous la forme exponentielle
2. .a. Placer les points A,B et C d'affixes respectives a , b et $c = a + \bar{b}$

   b. Vérifier que $c = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\, e^{i\frac{\pi}{4}}$
3. On considère dans ℂ l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2c = 0$

   a. Vérifier que a est une solution de (E)

   b. On désigne par d l'autre solution de (E) , montrer que $d = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\, e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

   Construire le point D d'affixe d.

Exercice 2

1. Résoudre dans ℂ, l'équation (E): $z^2 + (2+i)z + i = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\hat{u},\hat{v})$,

   on considère les points A, B *et* C d'affixes $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ est $z_C = 1$

   a. Mettre z_A *et* z_B sous forme exponentielle.

   b. Montrer que A *et* B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

   c. Construire les points A, B *et* C.
3. Soient les points E *et* F du plan d'affixes $z_E = z_A - 1$ *et* $z_F = z_B - 1$

   a. Montrer que $OEAC$ *et* $OFBC$ sont des parallélogrammes.

   b. Construire alors E *et* F

   c. Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$, $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{i\frac{7\pi}{6}} - 1$

   d. Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E)

Exercice 3

1)a. Vérifier que $(5 + 2i)^2 = 21 + 20i$

b. Résoudre dansℂ l'équation E : $z^2 - (5 - 4i)z - 3 - 15i = 0$

2) Ds le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on note A, B, A' et B' les pts d'affixes : -3i , 5 – i , -3 et 1 + 5i

   a. Placer les pts A, B, A' et B'

   b. Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles

3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixe z_M

a. Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k-3)i$

b. Montrer que les droites(OM) et (A'B') sont perpendiculaires ssi le point M est le milieu du segment [AB]

c. Vérifier que dans ce cas A'B' = 2 OM

Exercice4

Soit f la fonction définie $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$puis interpréter le résultat
2) a. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$

   b. Dresser le tableau de variation de f
3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
4) Donner le sens de variation de f^{-1} et préciser sur quel ensemble est dérivable
5) Tracer dans le même repère les courbes des fonctions f et f^{-1}
6) a. Déterminer le réel x positif tel que $f(x) = \frac{1}{2}$

   b. Calculer f(4) et $(f^{-1})'(-\frac{1}{3})$
7) a. Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$

   b. Vérifier que $0 < \alpha < 1$