

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)} & \text{si } -1 \leq x < 1 \end{cases}$

1)a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

2) Sachant que f est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$ déterminer $f(]-\infty, -1[)$ et $f(]1, +\infty[)$

3) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

3) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{\pi}$ admet une solution unique sur $]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}[$

5) Soit la fonction g définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ par : $g(x) = f \circ f(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Exercice 2

1) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

a. Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2

On désigne par B et C les points du plan d'affixes $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$

b. Mettre chacun des complexes b et c sous la forme exponentielle

c. En déduire que les points B et C appartiennent au cercle (C)

d. Construire alors les points B et C

2) a. Montrer que $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$

b. En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC

Exercice 3

1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -iz_B$

a. Montrer que le triangle OBC est isocèle et que $(\vec{OB}; \vec{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

b. Mettre z_B sous forme exponentielle et déduire que B appartient au cercle de centre O et de rayon 2

a. Placer le point A et construire les points B et C

2) Soit D le point d'affixe $z_D = (1-i)z_B$

a. Montrer que le quadrilatère OCDB est un carré

a. Montrer que $\text{aff}(\vec{AB}) = \sqrt{3}z_C$

b. Déduire que les points A, B et D sont alignés

c. Calculer l'aire du quadrilatère OADC

Exercice 4

1) Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes

$z_A = 3 + 3i$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = (1 - 2\sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3})i$

a. Vérifier que $z_C - z_B = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(z_B - z_A)$

b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. En déduire que le triangle ABC est équilatéral

2) Soient le point I d'affixe $1 + i$ et le point D symétrique du point C par rapport à I

a. Vérifier que I est le milieu du segment [AB]

b. Placer les points A, B, I, C et D

c. Montrer que le quadrilatère ACBD est un losange

d. Calculer l'aire de ce losange

Exercice 5

- 1) Ecrire chacun des nombres complexes $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ sous forme cartésienne
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A , B d'affixes $z_A = 1+i\sqrt{3}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$
 - a. Vérifier que $z_B = iz_A$
 - b. Dédire que le triangle OAB est isocèle et rectangle
 - c. Construire les points A et B
- 3) Soit le point C d'affixe $z_C = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$
 - a. Montrer que OACB est un carré
 - b. Placer le point C
 - c. Déterminer la forme exponentielle de z_C