Prof : M^r AFLI EZZEDDINE	Devoir de contrôle n°1 Mathematiques	Lycee secondaire taher hadded Bouhajla Niveau : $4^{éme}$ annee sc

EXERCICE N°1(06 PTS)

Soit la fonction f définie sur IR par f(x) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x+1} & si\ x \geq 0 \\ \frac{sin^3 x}{\sqrt{1+x^2}-1} & si\ x < 0 \end{cases}$

1) montrer que pour tout $x < 0$ on a : $|\ f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}$; en déduire que $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

2) calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

3a) vérifier que pour tout $x < 0$ on a : f(x) = $\frac{sin^3 x}{x^2}\left(1 + \sqrt{1+x^2}\ \right)$

b) montrer que f est continue en 0

4) soit g la fonction définie sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$] par g(x) = $\begin{cases} f\left(\frac{1}{sinx} - 1\right) & si\ x \in]\,0\,, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) montrer que g est continue à droite en 0

b) montrer que pour tout x ∈ [0 ; $\frac{\pi}{2}$] on a g(x) = cos x

c) montrer que l'équation g(x) = x admet dans [0 ; $\frac{\pi}{2}$] une unique solution

EXERCICE N°2 (05 PTS)

Sur la feuille annexe (C) est la représentation graphique d'une fonction f

Utiliser le graphique pour répondre aux questions

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to0^+} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x)$

2) étudier la continuité de f en 0

3) déterminer : f( ] - ∞ ; -1] et f( ] 0 ; 2]

4) soit g la fonction définie sur IR\ 1 et dont le tableau de variation est le suivant

a) Calculer : $\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)$; $\lim_{x\to1} \frac{(fog)(x)}{g(x)}$

b) déterminer le domaine de définition de (gof)

EXERCICE N°3 (05 PTS)

le plan complexe est munie d'un repère orthonormée direct (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$) .

soit (E_α) : (α – i) z^2 - [2(α - i) + iα] z + 2iα = 0 avec α un nombre complexe différent de i

I) dans cette partie on prend α = 1

1) donner la forme cartésienne de $(2 - 3i)^2$

2) résoudre (E_1) . on notera Z_1 et Z_2 les solutions avec la partie réelle de Z_1 est inférieure à celle de Z_2

3) donner la forme exponentielle de Z_1

4) montrer que ${Z_1}^{2002}$ est imaginaire pure

II) dans cette partie on prend $\alpha = e^{i\theta}$ ou $\theta \in] 0 ; \frac{\pi}{2} [$

1) montrer que α - i = 2cos $(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$

2) vérifier que 2 est une racine de (E_α)

3) trouver donc Z' l'autre solution de (E_α) en fonction de α

4) donner la forme exponentielle de Z'

5) déterminer la valeur de θ tel que le triangle OM'M'' soit isocéle en O avec M' d'affixe Z' et M'' d'affixe i

EXERCICE N°4 (04 PTS)

le plan complexe est munie d'un repère orthonormée direct (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$) . on donne les A ; B ; C et D d'affixes respectifs z_A = 1 + i ; $z_B = \sqrt{3}$ + i ; z_C = 1 - i$\sqrt{3}$ et $z_D = (\sqrt{3} + 1) + i (1 - \sqrt{3})$

1a) donner la forme exponentielle de z_A ; z_B et z_C

b) placer les points A ; B et C

c) montrer que le triangle OBC est rectangle isocèle

2) on donne le nombre complexe Z = ${z_A}^3 z_B$

a) donner la forme algébrique de ${z_A}^3$ puis déduire la forme algébrique de Z

b) donner la forme trigonométrique de Z

c) déduire les valeurs exactes de : cos $\frac{11\pi}{12}$ et sin$\frac{11\pi}{12}$

BON TRAVAIL