Exercice n°1 :

Dans la **figure1** de l'annexe ci-jointe :

- $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère orthonormé direct
- F et G sont les points d'affixes respectives -1 et $\sqrt{3}-1$
- $\left(\Gamma\right)$ est le demi- cercle de diamètre [FG]
- D est le point d'intersection de $\left(\Gamma\right)$ et l'axe $\left(O,\vec{v}\right)$

1) a) Vérifier que $OD=\sqrt{\sqrt{3}-1}$

b) Soit A le point d'affixe $z_A=\left(1+i\right)\sqrt{\sqrt{3}-1}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Vérifier que $z_A=OD\,e^{i-\frac{\pi}{12}}$ .Construire alors le point A

2) On considère dans C , l'équation $\left(E\right):z^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{\left(1+i\right)\sqrt{\sqrt{3}-1}}e^{i\frac{\pi}{6}}z+2e^{-i\frac{\pi}{6}}=0$

a) Vérifier que z_A est une solution de $\left(E\right)$

b) On désigne par B le point d'affixe z_B où z_B est la deuxième solution de l'équation $\left(E\right)$. Déterminer z_B

3) Montrer que O, A et B sont alignés.

4) Dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on a tracé la courbe $\left(\Gamma'\right)$ de la fonction $x\mapsto x^3$

a) Placer le point C tel que $z_C=OD^3\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$

b) Montrer que A est le milieu de $\left[BC\right]$. Construire alors le point B.

Exercice n°2 :

Le plan est orienté.

Dans **la figure 2** de l'annexe ci-jointe , ABCD est un rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ et $AB=2AD$ le point E est le symétrique de B par rapport à C, et I milieu de [CD].

1) La perpendiculaire à (AE) en A, coupe (CD) en F

Soit f la similitude directe de centre A telle que $f\left(E\right)=F$.

a) Déterminer une mesure de l'angle de f.

b) Déterminer les images des droites (AB) et (CE) par f. En déduire que $f\left(B\right)=D$.

c) Déterminer la forme réduite de f.

www.devoirat.net 2020

2) le cercle circonscrit au triangle ABE..

a) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABE. Déterminer le cercle (Γ') image de (Γ) par f

b) Le cercle (Γ') recoupe (Γ) en G . Montrer que les points B, D et G sont alignés

3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(E)=I$ et $g(B)=D$

a) Montrer que $g=S_{(AD)}\circ f$

b) Déterminer la droite Δ telle que $R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(AD)}\circ S_{\Delta}$

c) En déduire la forme réduite de g.

d) Soit $J=g(F)$. Montrer que $\overrightarrow{AJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

<u>Exercice n°3 :</u>

1) Montrer que pour tout n de IN on a : $3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$.
2) Résoudre dans Z l'équation $x^2-x+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,6)$.
3) a) Montrer que pour tout $x\in\{2,3,4,5,6\}$ $x^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$
   b) En déduire que $2^{2018}\equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$.
4) Soit $A_n=4^n+5^n+6^n+9^n+10^n$ $n\in IN$.
   a) Montrer que si $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$ alors $A_n\equiv 6(\mathrm{mod}\,7)$.
   b) En déduire le reste de A_{2017} modulo 7.

<u>Exercice n°4 :</u>

A) Soit la fonction f définie sur IR_+ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

C_f désigne la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
   b) Montrer que f dérivable sur IR_+^* et calculer $f'(x)$ pour tout x de IR_+^*.
2) a) Dresser le tableau de variation de f', en déduire le signe de f'(x) sur IR_+^*.
   b) Etudier les variations de f . En déduire que pour tout x de IR_+ $0\le f(x)<1$.
   c) Tracer C_f.

www.devoirat.net 2020

B) 1) a) Montrer que pour tout t de IR₊ on a : $t-\ln(1+t)\leq\frac{t^2}{2}$

b) En déduire que pour tout x de IR_+^* $0\leq 1-f(x)<\frac{1}{2x}$.

2) a) Montrer que pour tout $k\in IN^*$ $\frac{1}{k+1}\leq\ln(1+k)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$.

b) En déduire pour tout $n\in IN^*$ $1+2+.....\frac{1}{n}\leq 1+\ln(n)$.

C) On considère les suites $(U_n)_{n\in IN^*}$ et $(V_n)_{n\in IN^*}$ définies par : $U_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ et $V_n=\frac{n^n}{n!}$.

1) a) Montrer que pour tout n de IN^* on a : $\ln(V_n)=-n\ln(U_n)$.

b) Montrer que pour tout n de IN^* on a : $\frac{V_{n+1}}{V_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

c) En déduire que pour tout n de IN^* $\ln(V_{n+1})-\ln(V_n)=f(n)$.

2) a) En utilisant **B) 1) b)** et **C) 1) c)** montrer que pour tout n de IN^* on a : $0\leq 1+\ln(V_{n+1})-\ln(V_n)\leq\frac{1}{2n}$.

b) En déduire que pour tout n de IN^* on a : $0\leq n-1-\ln(V_n)\leq\frac{1}{2}(1+\ln(n))$.

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(V_n)=1$. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

www.devoirat.net 2020

Annexe

Figure 1 :

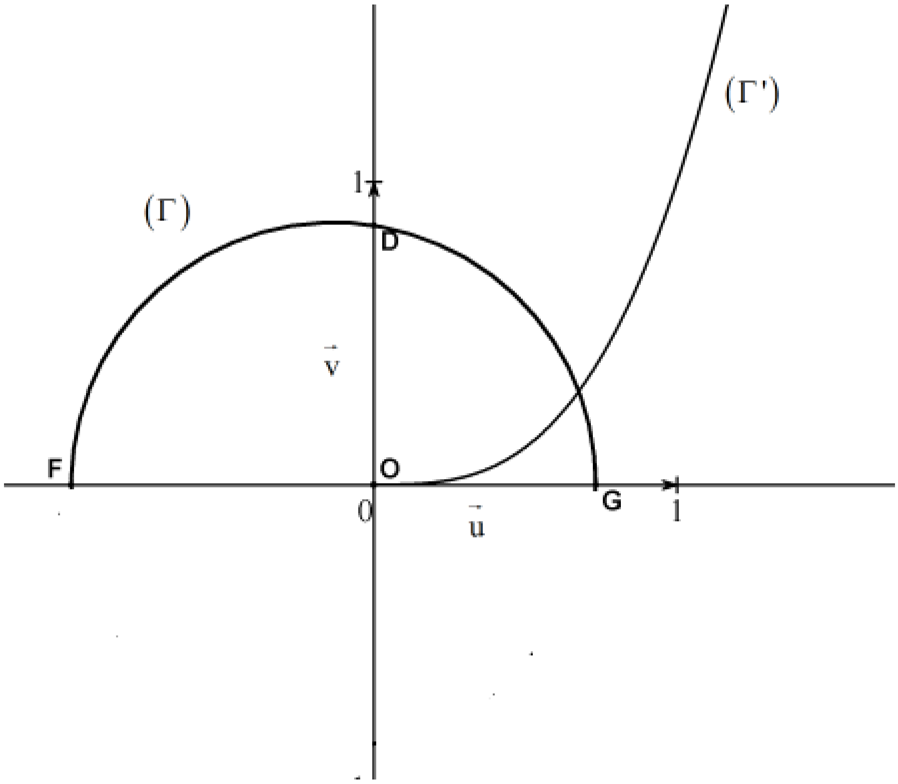
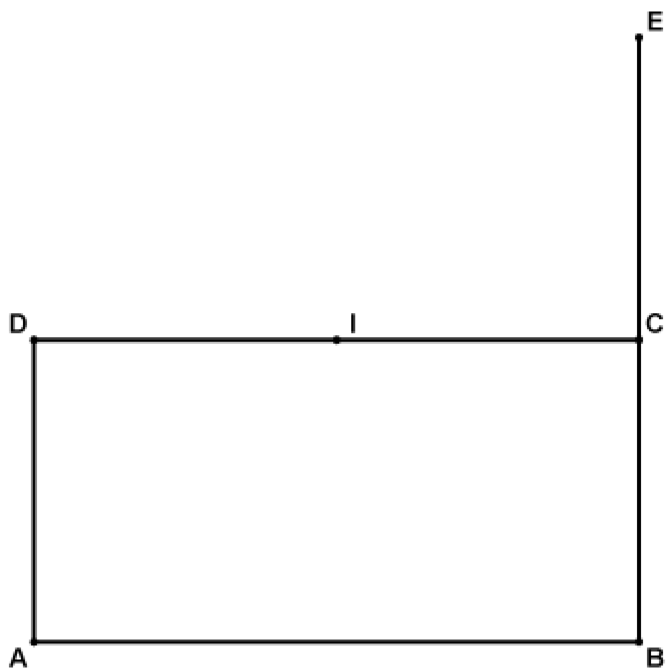


Figure 2 :



www.devoirat.net 2020