Problème :

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - \left(n+\frac{1}{2}\right) ln(n) + ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et de démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = ln(\sqrt{2\pi})$$

Partie I : Étude de la convergence de la suite(t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n\,;+\infty[$ par : $\psi(t) = ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n\,;+\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[,\ \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (On ne calculera pas les limites).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[,\ ln(1+\frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2. a) En utilisant la question **1.** d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, lnx \leq x-1.$$

b) Démontre que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k}-1)dx = 0.$

c) Déduis des questions **2.** a) et **2.** b) que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(\frac{x}{k})dx \leq 0.$

d) Justifie alors que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(x)dx \leq ln(k).$

e)En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} ln(x)dx \leq ln(n!).$$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n+\frac{1}{2}\right) ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + ln(n!) \geq ln(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ t_n \geq ln(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction f sur l'intervalle$]0\,;1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x}ln(\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall\, x \in]0\,;1[\,, f(x) \geq 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n).

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n).

Partie II : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, t\, dt.$$

1. a) Calcule w_1.

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive.
On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$.

On remarquera que : $sin^{n+2}(t) = sin(t) \times sin^{n+1}(t)$.

d) En utilisant les questions **1.** b) et **1.** c) de la partie II, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n^2$.

($On\ remarquera\ que : nw_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$).

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l, alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l.

a) Déduis de la question **2.** c) de la partie II la limite de la suite (nw_{2n}^2).

(On remarquera que : $nw_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2nw_{2n}^2)$).

b) En utilisant la question **1.** c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n!\,(\frac{e}{n})^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, e^{t_{2n}-2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{nw_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n).