Fonction exponentielle

1°. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Définition On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien .

L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté $\exp(x)$ ou e^x .

$$\boxed{\begin{array}{l} \exp : IR \to IR_+^* \\ \quad x \mapsto e^x \end{array}}$$

Conséquences

Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y , $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$			
Pour tout réel x , $\ln e^x = x$	Pour tout réel $x \succ 0$, $e^{\ln x} = x$	Pour tout $x \in IR$, $e^x \succ 0$	$\ln e = 1$

Application a/ Ecrire plus simple $e^{\ln 2}$; $e^{-\ln 3}$; $\ln e^{-2}$; $\ln e^{-2\ln 3}$

Corrigé : $e^{\ln 2} = 2$; $e^{-\ln 3} = e^{\ln \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$; $\ln e^{-2} = -2$; $\ln e^{-2\ln 3} = -2\ln 3 = -\ln 9$

b/ Déterminer x dans chacun des cas :

$e^x = 2$; $e^x = -1$; $\ln x = 3$; $e^{2x+3} = e$; $e^{2x} - 2\,e^x - 3 = 0$

Corrigé : $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$; $e^x = -1$ impossible car $e^x \succ 0$; $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$

$e^{2x+3} = e \Leftrightarrow 2x+3 = \ln e \Leftrightarrow 2x+3 = 1 \Leftrightarrow x = -1$

$e^{2x} - 2\,e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2\,e^x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 2X - 3 = 0$, $X = e^x \succ 0$

d'ou $X = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

Propriétés soit a et b deux réels .

P1.	$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
P2.	Pour tout entier n , $e^{na} = (e^a)^n$
P3.	Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$
P4.	Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p , $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$

Application Ecrire plus simple $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}}$ et $\frac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2}$.

Corrigé : $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{2}{6}} \times e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{2}{6}+\frac{3}{2}} = e^{\frac{11}{2}}$; $\frac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2} = \sqrt{\frac{e^3}{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e^7} \times \sqrt[4]{e^2} = e^{\frac{7}{2}} \times e^{\frac{2}{4}} = e^4$

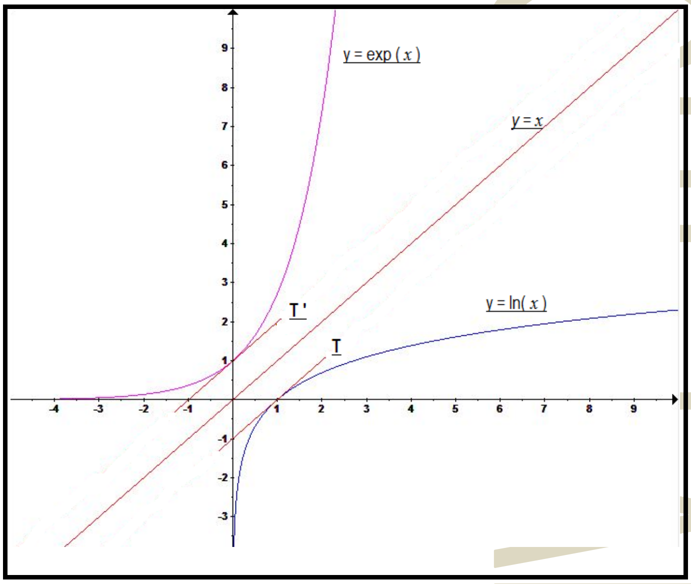
2°. ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Comme la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ; il est alors évident d'enduire les résultats qui se suivent :

- La fonction exponentielle est dérivable sur IR et sa dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR
- La fonction exponentielle est bijective de IR sur IR_+^*
- **Limites** $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

- **Tabeau de variation** et **représentation ghraphique**

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp$	0 ↗	$+\infty$



** La représentation graphique de la fonction exponentielle est le symétrique de celle de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = x$

** T' : $y = x+1$ tangente au point d'abscisse 0

** La droite des abscisses est une asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

** La courbe admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Conséquences

Pour tout réel x et y	Pour tout réel x et y	Pour tout réel $x \prec 0$	Pour tout réel $x \succ 0$
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$	$e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$	$0 \prec e^x \prec 1$	$e^x \succ 1$

Application Résoudre dans IR les inéquations suivantes : $e^{3x} \le e^{x^2}$; $e^{3x} \succ 4e^x$; $e^{x(x-1)} \prec 1$

Corrigé :

* $e^{3x} \le e^{x^2} \Leftrightarrow 3x \le x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \ge 0$; $S =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

* $e^{3x} \succ 4e^x \Leftrightarrow e^{3x} \succ e^{\ln 4} e^x \Leftrightarrow e^{3x} \succ e^{x+\ln 4} \Leftrightarrow 3x \succ x + \ln 4 \Leftrightarrow x \succ \ln 2$; $S = [\ln 2, +\infty[$

* $e^{x(x-1)} \prec 1 \Leftrightarrow e^{x(x-1)} \prec e^0 \Leftrightarrow x(x-1) \prec 0$; $S =]\,0, 1\,[$

Exercice 12 page 158 $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{1+e^{x}}$; $D_f = \mathrm{IR}$.

1°/ La fonction f est dérivable sur IR et on a $f'(x) = (x - \dfrac{1}{1+e^{x}})' = 1 + \dfrac{(1+e^{x})'}{(1+e^{x})^2} = 1 + \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} \succ 0$.

$f'(x) \succ 0$ pour tout $x \in IR$ donc f est strictement croissante sur IR .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{1+e^{x}} = +\infty - (\frac{1}{+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{1+e^{x}} = -\infty - \frac{1}{1+0} = -\infty$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

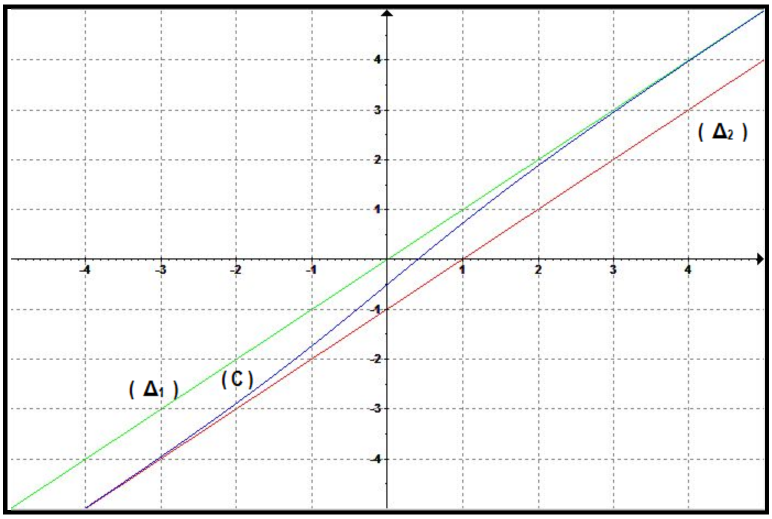
2°& 3°/ Branches infinies et courbe de f

on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{1+e^{x}} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$ donc la droite

$\Delta_1 : y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

et on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+-\infty} 1 - \dfrac{1}{1+e^{x}} = 1 - 1 = 0$ donc la droite

$\Delta_2 : y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ et comme ,



pour tout $x \in \mathrm{IR}$, on a :

$f(x) - x = -\dfrac{1}{1+e^{x}} \prec 0$

et $f(x) - (x-1) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}} \succ 0$

donc la courbe de f est en dessous de Δ_1 et au dessus de Δ_2 .

Exercice 5 Bac 2009 contrôle + **Exercice 4 Bac 2012 contrôle** + **Exercice 3 Bac 2018 contrôle**

2°. AUTRES LIMITES

Soit m et n deux entiers naturels non nuls	
• $\lim_{x\to-\infty} x^{m} e^{nx} = 0$	• $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^{m}} = +\infty$

Application Calculer les limites ci-dessous :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x+1}\ ;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3+1}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-e^{2x})\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}x(e^{2x}-e^x)\ ;\quad \lim_{x\to-\infty}x(e^{2x}-e^x)$$

4°. LA FONCTION $x\mapsto e^{u(x)}$

Théorème et corollaire Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est $x\mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ pour tout $x\in I$.
- Les primitives sur I de la fonction $x\mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ sont les fonctions $x\mapsto e^{u(x)}+k$, $k\in IR$.

Application a/ Calculer la dérivée de la fonction $f:x\mapsto x^3e^{2x}$

b/ Déterminer la primitive de la fonction $g:x\mapsto -e^x+(2x+1)e^{x^2+x}$ qui s'annule en zéro .

c/ Calculer les intégrales $I=\int_0^1 xe^{x^2}dx$ et $J=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$

Exercice 16 page 159 $f:x\mapsto x-2+e^{\frac{-1}{2}x}$; $D_f=IR$.

1°/ La fonction f est dérivable sur IR et on a $f'(x)=1-\frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}$.

$f'(x)\geq 0\Rightarrow 1-\frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}\geq 0\Rightarrow e^{\frac{-x}{2}}\leq 2\Rightarrow x\geq -\ln 4$ d'où f est croissante sur $[-\ln 4,+\infty[$

et décroissante sur $]-\infty,-\ln 4]$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x-2+e^{\frac{-x}{2}}=+\infty-2+0=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x-2+e^{\frac{-x}{2}}=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{-x}{2}}}{\frac{-x}{2}}\right)$$

$$=-\infty\left(1-0-\frac{1}{2}\times(+\infty)\right)=+\infty$$

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

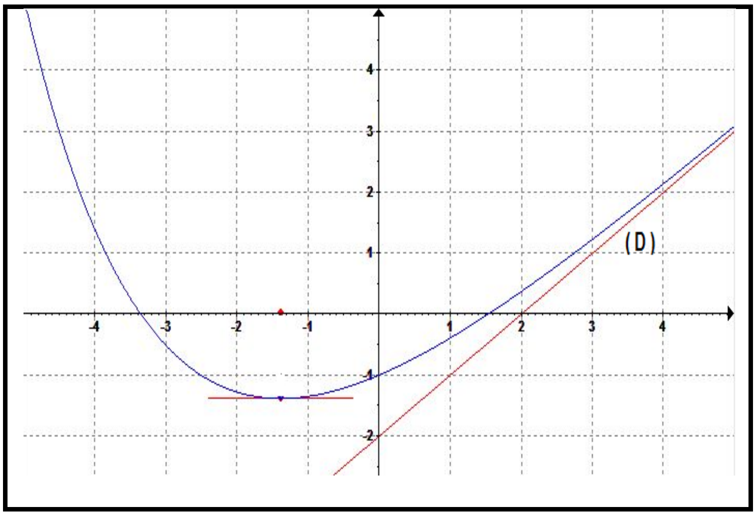
2°/ <u>Branches infinies</u> et <u>représentation ghraphique</u>

On a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-x}{2}}=0$ donc la droite $D:y=x-2$

est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$; et on a aussi

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{-x}{2}}}{\frac{-x}{2}}=1-0-\frac{1}{2}(+\infty)=-\infty$$

donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



3°/ Calcul et limite d'aire

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} |f(x) - (x-2)|\, dx = \int_0^{\lambda} e^{\frac{-x}{2}}\, dx$$

$$= \left[-2\, e^{\frac{-x}{2}} \right]_0^{\lambda}$$

$$= 2(1 - e^{\frac{-\lambda}{2}})\ \text{ua}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} 2(1 - e^{\frac{-\lambda}{2}}) = 2(1-0) = 2\text{ua}$$

Exercice

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{-1}^{0} \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$; pour tout $n \in IN$

1°/ Montrer que $I_n \succ 0$ pour tout $n \in IN$

2°/ a/ Calculer I_0 et I_1

b/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $I_n + I_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$; Calculer alors I_2.

3°/ a/ Montrer que pour $t \in [-1, 0]$ et pour tout $n \in IN^*$, $\frac{e^{nt}}{1+e^t} \prec e^{nt}$

b/ En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \prec \frac{1}{n}$ puis calculer la limte de I_n.

Exercice 4 Bac 2016 Contrôle + Exercice 3 Bac 2017 Principale

5°. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a (a >0)

Définition et conséquences Soit un réel $a \succ 0$.

- On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction $x \mapsto a^x$ (notons que $a^x = e^{x \ln a}$) .
- La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur IR et sa dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)\, a^x$.
- La fonction $x \mapsto 1^x$ ($a = 1$) est une fonction constante .

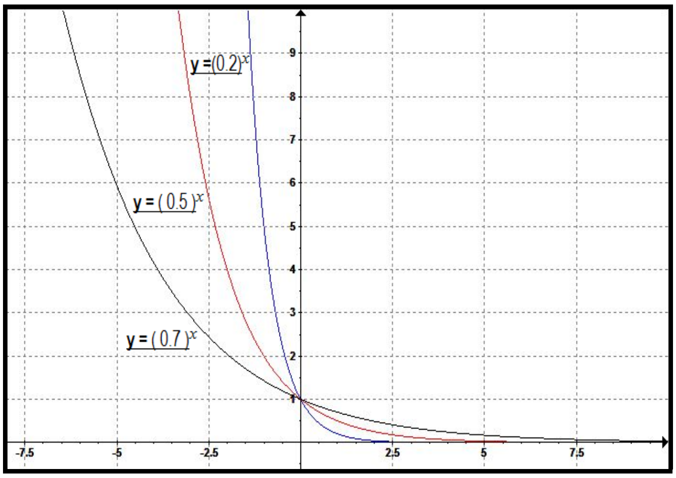
Limtes , tableau de variation et courbe de la fonction $f : x \mapsto a^x$	
$0 \prec a \prec 1$	$a \succ 1$

$0 \prec a \prec 1$

- La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur IR
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
- Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

- Exemples de courbes

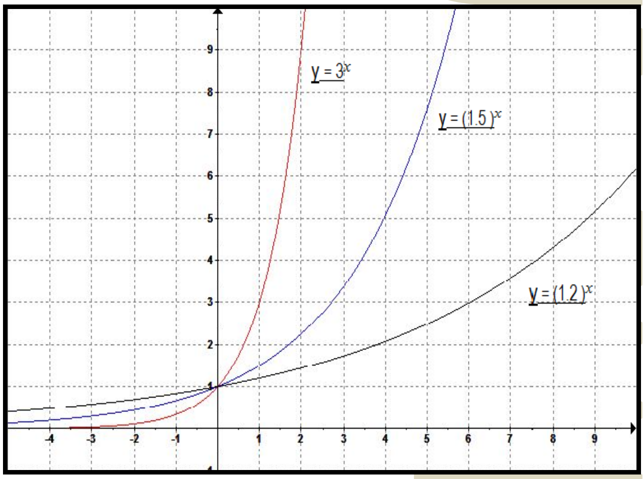


$a \succ 1$

- La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur IR
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Exemples de courbes



Activités 5 et 6 page 152

6°. FONCTIONS PUISSANCES

Définition et conséquences Soit r un rationnel .

- On appelle fonction puissance r la fonction $x \mapsto x^r$, $x \succ 0$ (notons que $x^r = e^{r \ln x}$) .
- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur IR_+^* et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r x^{r-1}$.
- Les primitives sur IR_+^* de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + k$, $k \in IR$.

Exemple La fonction définie sur IR_+^* par $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ est une fonction puissance .

La fonction f est dérivable sur IR_+^* et sa dérivée est la fonction $f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}}$.

Une primitive de f sur IR_+^* est $F(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+k$, $k\in IR$

Limtes

Si $r \prec 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=+\infty$
Si $r \succ 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r}=+\infty$

Application Calculer les limites ci-dessous :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}} \;;\; \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}} \;;\; \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \;;\; \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{4}{3}} \;;\; \lim_{x\to+\infty} \left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right) \;;\; \lim_{x\to 0^+} \left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x \;;\; \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}e^{-x}.$$

Exercice On se propose d'étudier et de représenter la fonction définie sur IR_+^* par $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

- f est dérivable sur IR_+^* et $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}\succ 0$ pour $x\in IR_+^*$ donc f est strictement croissante sur IR_+^*

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}=+\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{-1}{3}}=0$

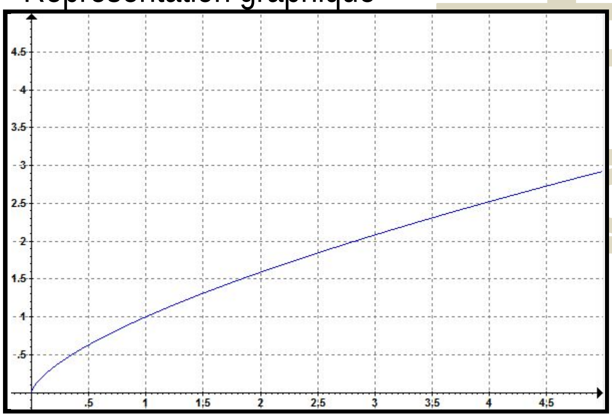
  donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite des abscisses au voisinage de $+\infty$.

-

- Tableau de variation

x	- ∞ + ∞
$f'(x)$	+
f	0 ↗ +∞

- Représentation graphique



- Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes de f et f^{-1} et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$