Série de révision Bac 2020

Exercice n°1 :

On considère dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation :

(E) : $z^2-(1+i\sqrt{3})z-2+2i\sqrt{3}=0$.

1) a/ Vérifier que $(3-i\sqrt{3})^2 = 6-6i\sqrt{3}$
   b/ Résoudre dans C l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   a/ Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2.
   On désigne par B et C les points du plan d'affixes respectives $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=\overline{b}$

   b/ Mettre chacun des nombres complexes b et c sous la forme exponentielle

   c/ En déduire que les points B et C appartiennent au cercle (C)

   d/ Construire alors les points B et C.

3) a/ Montrer que $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

   b/ En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=(e^{-x}-1)^2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan (Unité : 2cm)

1) a/ Montrer que ($\forall$: c $\in [0,+\infty[$) $f'(x)=2e^{-x}(1-e^{-x})$
   b / Dresser le tableau de variation de f.
2) a/ Tracer (C)
   b/ Calculer en cm, l'aire A dans la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives y=0 ; x=0 et x=1.
3) a/ Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b/ Tracer dans le même repère la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f.
   c/ Calculer en cm^3, l'aire A' de la partie du plan limitée par les courbes (C), (C') et les droites d'équations respectives x=1 et y=1.
4) a/ Montrer que ($\forall y, \in [0,1[$) $f^{-1}(x)=-\ln(1-\sqrt{x})$
   b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ et déterminer $(f^{-1})'(x)$
5) On pose $I_a= \int_{\alpha}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}-x}dx$ où α est un réel de $]0,1[$

   a/ Montrer que $I_\alpha=2\ln 2+21n\ (\alpha)$

   b/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} I_\alpha$

Exercice n°3 :

I/ On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$.

1) Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x)=xe^{-1}$ est une solution de l'équation (E)
2) Montrer que si y est une solution de (E) alors y-g est une solution de (E') : $y'+y=0$
3) En déduire la solution y de (E) tel que $y(0)=1$

II/ Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)= (x+1)e^{-x}$ et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=1cm$ et $\|\vec{j}\|=2cm$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) a/ Montrer que le point I $\left(1,\frac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion de C_f.

   b/ Donnez une équation de la tangente T à C_f au point I et préciser le point d'intersection de T et l'axe des abscisses.

   c/ Tracer T et C_f.
3) Calculer en cm² l'aire du domaine du plan limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x=-1 et x=0.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=(e^{-x}-1)^2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (Unité : 2cm)

1) a/ Montrer que $(\forall x \in [0,+\infty[)$ $g'(x)=2e^{-x}(1-e^{-x})$

   b/ Dresser le tableau de variation de f.
2) a/ Tracer (C)

   b/ Calculer en cm², l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives y=0 : x=0 et x=1.
3) a/ Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b/ Tracer dans le même repère la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

   c/ Calculer en cm², l'aire A' de la partie du plan limitée par les courbes (C), (C') et les droites d'équation respectives x=1 et y=1.
4) a/ Montrer que $(\forall x\in[0,1[)$ $f^{-1}(x)=-\ln(1-\sqrt{x})$

   b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ et déterminer $(f^{-1})'(x)$
5) On pose $I_0=\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}-x}\,dx$ où α est un réel de $]0,1[$

   a/ Montrer que $I_\alpha=2\ln 2-21^{\alpha-1}$ (α)

   b/ Calculer $\lim_{x\to 0^-} I_\alpha$

Exercice 5 :

L'espace ζ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points A(-1,5,2), B(-1,-3,-2), C(3,-3,2) et D(-1,3,6)

1) a/ Montrer que les points A, B et C sont non alignés.
   b/ Montrer que le plan (ABC) noté P a pour équation cartésienne :
   2x+y-2z+1=0
2) Montrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume.
3) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que $x^2+y^2+z^2+2x-4z-20=0$
   a/ Montrer que S' est une sphère qu'on déterminera le centre I et le rayon R.
   b/ Montrer que [BD] est un diamètre de S.
4) Montrer que le plan P coupe S suivant un cercle ζ qu'on déterminera son centre H' et son rayon r
5) Soit Qm :3y+4z-16m-1=0 où m∊IR
   a/ Discuter suivant les valeur de m, la position de S et Q_m.
   b/ Montrer que Q_2 est tangent à la sphère S et déterminer leur point de contact
6) a/ Montrer que les plans P et Q_2 sont sécants suivant une droite Δ d'ont on déterminera une représentation paramétrique.
   b/ Déterminer et l'équation cartésienne du plan R parallèle à Δ, perpendiculaire à Q_2 et passant par D.
   c/ Montrer que R coupe la sphère S suivant un grand cercle.

Exercice n°6 :

On note f la fonction définie sur l'intervalle]0,+∞[par $f(x)=\frac{1}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

L'unité graphique est 1cm.

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to \cos x} f(x)$, interpréter graphiquement les résultats.
2) a/ Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{4}}\,(2x+1)$.
   b/ Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle]0,+∞[
   c/ Démontrer que l'équation f(x)=2 a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle]0,+∞[et vérifier que $1,1<\alpha<1,2$
3) Tracer la courbe C dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2.

Exercice n°7 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u}, \vec{v})$.

1) a/ Vérifier que : $-7-4i\sqrt{2} = (1 - 2i\sqrt{2})^2$
   b/ Résoudre dans C, l'équation (E) : $z^2+z+2+i\sqrt{2}=0$
2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-i\sqrt{2}$; $z_B=-1+i\sqrt{2}$ et $z_C=\overline{z_A}$
   Montrer que C est un point du cercle (ζ) de diamètre [AB]
3) A tout point M du plan d'affixe z distinct de chacun des points A et B, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}$
   a/ Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle (ζ) de diamètre [AB].
   b/ Montrer que si $|z'|=1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment [AB].

Exercice n°8 :

Dans un lycée 55% des élèves possèdent un ordinateur. Parmi les élèves ayant un ordinateur 20% font l'option Italien, 30% font l'option dessin, aucun élève fait à la fois l'Italien et le dessin.

Parmi les élèves n'ayant pas un ordinateur, 5% font l'Italien, 15% font le dessin, aucun élève fait à la fois l'Italien et le dessin.

On choisit au hasard un élève de ce lycée.

On considère les évènements suivants :

- D : « L'élève a un ordinateur »
- V : « L'élève fait l'option Italien »
- F : « L'élève fait l'option dessin »

1) a/ Déterminer p(D) et p(V/D)
   b/ Calculer la probabilité que l'élève a un ordinateur et fait l'option Italien.
   c/ Calculer la probabilité que l'élève fait l'option Italien et n'a pas ordinateur.
   d/ Calculer p(V) et p(F)
2) Quelle est la probabilité que l'élève a un ordinateur sachant qu'il fait l'option Italien.
3) On choisit n élève de ce lycée et on désigne par X le nombre de ceux qui ont un ordinateur et font l'option Italien. Déterminer n sachant que E(X)=1,1.