Série de révision 1 bac 2020

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur]-∞,0] par f(x)=$\sqrt{1-e^X}$

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

X	-∞	0
f '(x)		‖
f(x)	1 ↘	0

Tracer (ζ) c_1 la demi-tangente à l'origine du repère, (unité graphique 1cm)

3. a/ Montrer que f réalise une bijection de]-∞,0] sur [0,1[.

   b/ Tracer (ζ') la courbe représentative de f $^{-1}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

   Justifier, graphiquement, la dérivabilité de f $^{-1}$ à droite en 0.

4. a/ Montrer que pour x ∈[0,1[, f $^{-1}$(x=-ln(1-x²)

   b/ Montrer que la fonction F(x)=(x-1)ln(1-x)+(x+1)ln(x+1)-2x est une primitive de f $^{-1}$ sur [0,1[

   c/ Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ') et les droites d'équations y=-ln2, x=0 et x=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Montrer que A=3ln2-2

   d/ En déduire la valeur de $\int_{ln2}^{0} \sqrt{1-e^X}\, dx$

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a/ Montrer que l'équation f(x)=$\frac{1}{n}$ admet le réel xn=ln $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ l'unique solution dans]-∞,0].

   b/ Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} n^2 x_n = -1$

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur [e,+∞[par f(x)=ln x$\sqrt{\ln x - 1}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. a/ Montrer que $\lim\limits_{x \to e^1} \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x-e} = +\infty$.

   b/ En déduire que f n'est pas dérivable à droite en c.

2. a/ Montrer que pour tout réel x>e, f '(x)= $\frac{3\ln x - 2}{2x\sqrt{\ln x - 1}}$

   b/ Dresser le tableau de variation de f.

3. Dans l'annexe ci-jointe, C_g est la courbe représentative dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de la fonction g définie sur]0,+∞[par g(x)=ln x.

   a/ Etudier la position relative de C_f et C_g.

   b/ Montrer que C_f admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{\imath})$

   c/ Construire sur l'annexe les points A et B de C_f d'abscisses respectives e et e^2

   d/ Tracer C_f dans l'annexe.

4. On pose $J_n = \int_e^{e^2} (\ln x)^n \; dx, n \geq 1$.

   a/ Calculer J_1.

   b/ Montrer que pour tout n≥2, $J_n + nJ_{n-1} = 2n\, e^2 - e$.

   c/ En déduire J_2 et J_3.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

   Soit Γ_f la courbe de la restriction de f à [e,e²] et Γ_g la courbe de la restriction de g à [e,e²].

On note (S_f) et (S_g) les solides obtenus respectivement par rotation de Γ_f et Γ_g autour de l'axe $(O,\vec{\imath})$

Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides (S_f) et (S_g)

Série de révision 1 bac 2020

Exercice n°3 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'-3y=\frac{3}{1+e^{-3x}}$

1) Soit $u(x)= -e^{3x}\ln(1+e^{-3x})$

   Montrer que u est une solution de (E)

2) Soit f solution de (E), on note h la fonction définie sur IR par $h(x)=e^{-3x}f(x)$

   Montrer que f est solution de (E)$\Leftrightarrow h'(x)=\frac{3e^{-3x}}{1+e^{-3x}}$

3) Déterminer les fonctions h possibles.
4) Déduire les solutions f de (E)
5) Déterminer la fonction g solution de (E) et qui vérifie g(0)=0

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{4}xe^{\frac{-1}{2}x}$

1) a/ Montrer que f est positive sur $[0,+\infty[$

   b/ Montrer que la droite Δ : y=0 est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

   c/ Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$

2) Déterminer le coefficient directeur de la demi tangente à C_f à droite en O'
3) Tracer C_f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
4) On considère la fonction G définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

   a/ Montrer que F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

   b/ Montrer que $F(x)=1-e^{\frac{-x}{2}}-\frac{x}{2}\ e^{\frac{-x}{2}}$

5) Soit $\alpha > 2$ et A_0 l'aire de la partie plane limitée par C_f et les droites Δ_1 :y=0, Δ_2 :x=2, Δ_3 :x=α

   a/ Calculer A_0 en fonction de α

   b/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} A_\alpha$

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par $f(x)=e^x\sqrt{e^x-1}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en O. interpréter le résultat graphiquement
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Dans l'annexe ci-jointe en a représenté C_1 et C_2 les courbes respectives des fonctions $x \to e^x$ et $x \to \ln x$

   a/ Etudier la position relative de C_f et C_1.

   b/ Tracer C_f dans l'annexe.
4) a/ Montrer que f réalise une bijection de [0,+∞[sur un intervalle J à préciser.

   b/ Construire dans le même repère la courbe ζ' de la fonction réciproque de f.

   c/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ', C_2 et l'axe des abscisses.

Exercice n°6 :

Une usine fabrique des appareils électroniques dans deux ateliers A et B. l'atelier A assure 60% de la production et l'atelier B assure 40%. D'autre part 5% des appareils fabriqués dans A et 10% de ceux fabriqués dans B sont de deuxième choix.

1) Dans un lot d'appareils fabriqués dans l'usine on choisit au hasard un appareil. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   E : l'appareil choisi est de deuxième choix.

   F : l'appareil choisi est fabriqué dans B sachant que dans B sachant qu'il est du premier choix.

   G : l'appareil choisi est de premier choix ou fabriqué dans A.
2) Dans un lot contenant 6 appareils fabriqués dans A et 4 appareils fabriqués dans B. On choisit au hasard et avec remise 5 appareils. Calculer la probabilité de l'évènement H : obtenir 3 appareils fabriqués dans A.

Exercice n°7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe -2i et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z (z≠i) associe le point M' d'affixe z' définie par : z'=$\frac{2z-i}{iz+1}$

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$
2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du pont D' associé au point D par l'application f.
3) a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i : (z'+2i)(z-i)=1

   b. En déduire que pour tout point M d'affixe z (z≠i)

   BM' × AM=1 et $\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)$=- $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)$+kx2π où k est un entier relative.
4) a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle ζ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   b. En utilisant les résultats de la question 3.b.. placer le point E' associé au point E par l'application f. on laissera apparents les traits de construction.
5) Quelle est la nature du triangle BD'E' ?

Exercice n°8 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère :

- les points A(1 ; 1 ; 1) et B (3 ; 2 ; 0)
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal :
- le plan (Q) d'équation x-y+2z+4=0.

- La sphère (S) de centre le point A et de rayon AB.

1) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est :
   2x+y-z-8=0
2) Déterminer une équation de la sphère (S)
3) a. Calculer la distance du points A au plan (Q)
   En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
   b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?
   4) On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2 ; -1)
   a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q)
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 12 - 5t \;\; avec\; t \in IR \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$
   c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D).
   d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
   L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
   « Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C »
   Justifier la réponse.

Exercice n°9 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-1 ; +∞[par : f(x)=1+ln (1+x)

On note ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\vec{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note D la droite d'équation y=x.

Partie A

1) a. Etudier le sens de variation de fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle]-1 ;+∞[par g(x)=f(x)-x

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

c. Etudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variation de la fonction g.

d. Montrer que sur l'intervalle]-1 ;+∞[, l'équation g(x)=0 admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle [2 ; 3].

e. A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de g(x). En déduire la position relative de la courbe ζ_f et de la droite D.

Partie B :

Dans une partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leq u_n \leq \beta$

2) La suite (u_n) est-elle tangente ? Justifier la réponse.