Professeur Kamel Bel Asri

4ème Maths et SC-Exp

Equations différentielles

Exercice N°1 :

On cherche à déterminer les fonctions $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ x(x-1)y'(x)-(3x-1)y(x)+x^2(x+1)=0$.

1. Déterminer deux constantes a et b telles que :

$$\frac{3x-1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}$$

2. Sur quel(s) intervalle(s) connait-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E)sur $\mathbb{R}$

Exercice N°2 :

On se propose de chercher toutes les fonctions $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables, et vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)+2y(x)=x+1.$$

On notera (E) cette équation.

1. Équation homogène. On va d'abord chercher toutes les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables, et vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)+2y(x)=0.$$

On notera (H) cette équation.

   1. Soit $C\in\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction $x\mapsto Ce^{(-2x)}$ est solution de (H).
   2. Réciproquement, soit y une solution de (H). On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$

      $f(x)=y(x)e^{(2x)}$. Démontrer que f est constante. En déduire toutes les solutions de (H).

2. Retour à l'équation originale :
   1. Déterminer deux réels a,b tels que $y_0(x)=ax+b$ soit solution de (E).
   2. Soit $C\in\mathbb{R}$ Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=y_0(x)+Ce^{(-2x)}$ est solution de (E).
   3. Réciproquement, soit y une solution de (E). On pose $z=y-y_0$. Démontrer que z estsolution de (H).
   4. En déduire toutes les solutions de (E).
3. Sur le même modèle, déterminer l'ensemble des fonctions $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$dérivables telles que

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\ y'-7y=-7x^2-5x-6.$$