Série n°5 : Oscillations mécaniques forcées

Exercice n°1

Un pendule élastique est constitué d'un ressort à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur **k = 20 N.m^{-1}**. L'une de ses extrémités est fixée à un support immobile. A l'autre extrémité, est accroché un solide (**S**) de masse **m** pouvant osciller librement selon l'axe horizontal.
L'origine **O** des abscisses est confondue avec la position de **G** lorsque (**S**) est au repos (**Figure 9**).
La position du centre d'inertie **G** de (**S**) est repérée par son abscisse **x** relativement au repère $(O, \vec{i})$.

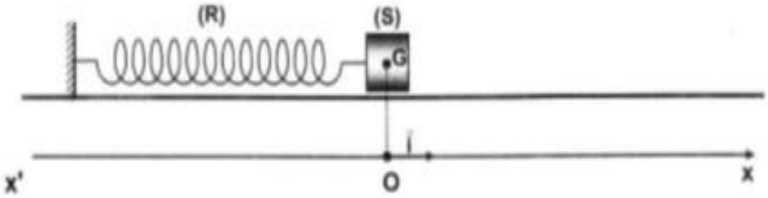


Figure 9

I - Les forces de frottement ainsi que l'amortissement du mouvement sont considérés comme négligeables.

On écarte (**S**) de sa position de repos en le déplaçant, suivant l'axe **x'x**, de manière à ce que le ressort s'allonge d'une distance **a = 3 cm**. A un instant de date **t = 0**, on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. La durée de **10** oscillations est : **Δt = 6,896 s**.

1) **a-** Vérifier que la valeur de la fréquence propre des oscillations est **N_0 = 1,45 Hz**.
   b- En déduire la valeur de la masse **m** du solide (**S**).

2) On désigne par **E** l'énergie mécanique du système oscillant {solide, ressort}.
   a- Donner l'expression de **E** en fonction de **x**, **k**, **m** et de la vitesse instantanée **v** du centre d'inertie **G**.
   b- Calculer **E** à l'instant **t = 0**.
   c- Le système étant conservatif, déterminer, en le justifiant, la valeur de la vitesse de **G** lors de son premier passage par le point **O**.

II- Le solide (**S**) est maintenant soumis, au cours des oscillations, à une force de frottement de type visqueux, $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de **G** et **h = 0,73 N.m^{-1}.s**.

A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (**S**) une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi N t + \varphi_F).\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable.

L'équation différentielle régissant les oscillations de **G** s'écrit : $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + h\dfrac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t)$ (I)

L'élongation instantanée de **G**, $x(t) = X_m \sin(2\pi N t + \varphi_x)$ est une solution de l'équation (**I**).

Pour une fréquence N_1 de la force excitatrice, on enregistre la courbe schématisée par la **figure 10**, qui traduit l'évolution de **x(t)**.

1) **a-** En exploitant cette courbe d'évolution, déterminer la valeur de N_1.
   b- Justifier que **G** effectue des oscillations mécaniques forcées correspondant à une résonance de vitesse.

2) Montrer que **F(t)** s'écrit : $F(t) = h\dfrac{dx(t)}{dt}$.

3) Déterminer, à partir de la courbe de la **figure10**, les valeurs de X_m et φ_x. En déduire celles de F_m et φ_F.

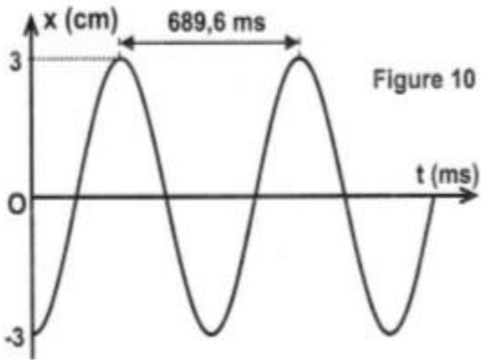


Figure 10

Correction

I

1-a- La durée mise pour effectuer 10 oscillations est $\Delta t = 10T_0$, avec $T_0 = \frac{\Delta t}{10}$, la fréquence propre N_0 est égale à $\frac{10}{\Delta t}$; A.N: $N_0 = 1,45$ Hz.

b- $N0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$; $m = \frac{k}{4\pi^2 N_0^2}$; A.N: m = 0,242 kg.

2-a- $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\,x^2$.

b- A t=0, $x_0 = 3$cm et $v_0 = 0$, $E_0 = \frac{1}{2}k\,x_0^2$, A.N: $E_0 = 9.10^{-3}$ J.

c- E = constante $\Rightarrow E(x=0) = \frac{1}{2}mv_0^2$, $v_0 = -\sqrt{\frac{2E_0}{m}}$, A.N: $v_0 = -0,27\ m.s^{-1}$.

II.

1-a- la fréquence $N_1 = \frac{1}{T_1}$ or $T_1 = 689,6.10^{-3}$s d'où $N_1 = 1,45$ Hz.

b- la fréquence N_1 est égale à la fréquence propre N_0 : résonance de vitesse.

2- $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$ (I)

$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = -m\omega 2x + kx = -m\omega_0^2 x + kx = x(-m\omega_0^2 + k) = 0$, $\omega = \omega_0$; alors F(t) ne peut être que $h\frac{dx(t)}{dt}$, $F(t) = h\frac{dx(t)}{dt}$.

3- $X_m = 3$cm, $\varphi_x = -\frac{\pi}{2}$rad.

$F_m = hX_m\,\omega_0 = 2hX_m\pi\,N_0$; AN: $F_m = 0,2$ N. A la résonance de vitesse F(t) et v(t) sont en phase, donc F(t) est en quadrature avance de par rapport à x(t): $\varphi_{F(t)} = \varphi_{x(t)} + \frac{\pi}{2} = 0$ rad

Exercice n°2

Le pendule élastique de **la figure 2** est constitué d'un solide **(S)** de masse **m = 198 g** et de centre d'inertie **G**, attaché à l'une des extrémités d'un ressort **(R)** à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur **k = 20 N.m^{-1}**. L'autre extrémité du ressort est fixée à un support immobile.

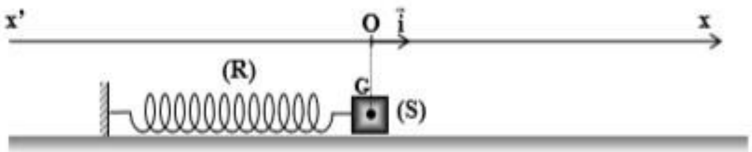


figure 2

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de **(S)** coïncide avec l'origine **O** du repère **(O , $\vec{i}$)** de l'axe **x'x**.

On désigne par **x(t)** l'abscisse de **G** à un instant de date **t**, dans le repère **(O , $\vec{i}$)** et par **v(t)** la valeur de sa vitesse à cet instant.

On utilise ce pendule, pour réaliser les deux expériences suivantes:

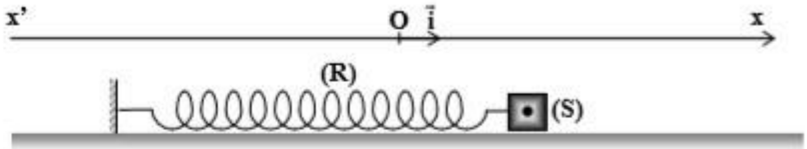
***Expérience 1*:** On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance **a**, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant de date **t = 0**. Le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point **O**.
A un instant de date **t**, le système {(S) + (R)} est représenté sur la **figure 3 de l'annexe (page 5/5)**.
Les frottements sont supposées négligeables.

1- **a**- Représenter sur la **figure 3 de l'annexe**, les forces extérieures exercées sur (S).
b- En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que l'équation différentielle du mouvement de **G** peut se mettre sous la forme : $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\, x(t) = 0$; où β est une constante que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.
c- Sachant que l'équation différentielle précédente admet une solution de la forme $x(t) = a\sin\left(2\pi N_0 t + \varphi_x\right)$, montrer que la fréquence propre N_0 des oscillations de **G** s'exprime par : $N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Calculer sa valeur.

2- **a**- Donner l'expression de l'énergie mécanique **E** du système {(S) + (R)} en fonction de **m**, **k**, **x** et **v**.
b- Montrer que le système {(S) + (R)} est conservatif.
c- Sachant que **E = 0,025 J**, déterminer la valeur de **a**.

3- En exploitant les conditions initiales, déterminer la valeur de la phase initiale φ_x de **x(t)**.

figure 3



***Expérience 2*:** A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(2\pi N t)\,\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable. Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ de type visqueux portée par l'axe **x'x**, opposée au mouvement de (S) et telle que $\vec{f} = -h\vec{v}$; où **h** est une constante positive.
La loi horaire du mouvement du centre d'inertie **G** de (S) est de la forme : $x(t) = X_m \sin\left(2\pi N t + \varphi\right)$

avec $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{4\pi^2 h^2 N^2 + \left(k - 4m\pi^2 N^2\right)^2}}$.

1- Les oscillations effectuées par **G** sont-elles libres ou forcées ? Justifier.

2- Pour une valeur N_1 de la fréquence de la force excitatrice, l'amplitude X_m des oscillations de **G** passe par un maximum.
a- Donner le nom du phénomène dont l'oscillateur est le siège à la fréquence N_1.
b- Montrer que N_1 est donnée par : $N_1 = \sqrt{N_0^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$.

3- Une étude expérimentale a permis de tracer les courbes (c_1) et (c_2) de la **figure 4 de l'annexe (page 5/5)**. Elles traduisent les variations de X_m et de V_m en fonction de N ; V_m étant l'amplitude de la vitesse instantanée **v(t)**.
a- Justifier que la courbe (c_1) correspond aux variations de X_m en fonction de N.
b- En exploitant les courbes de la **figure 4**, déterminer la valeur du coefficient de frottement **h** ainsi que celle de l'amplitude F_m.
c- Déterminer pour **N = 1,6 Hz**, la valeur de la phase initiale φ de l'élongation **x(t)**.

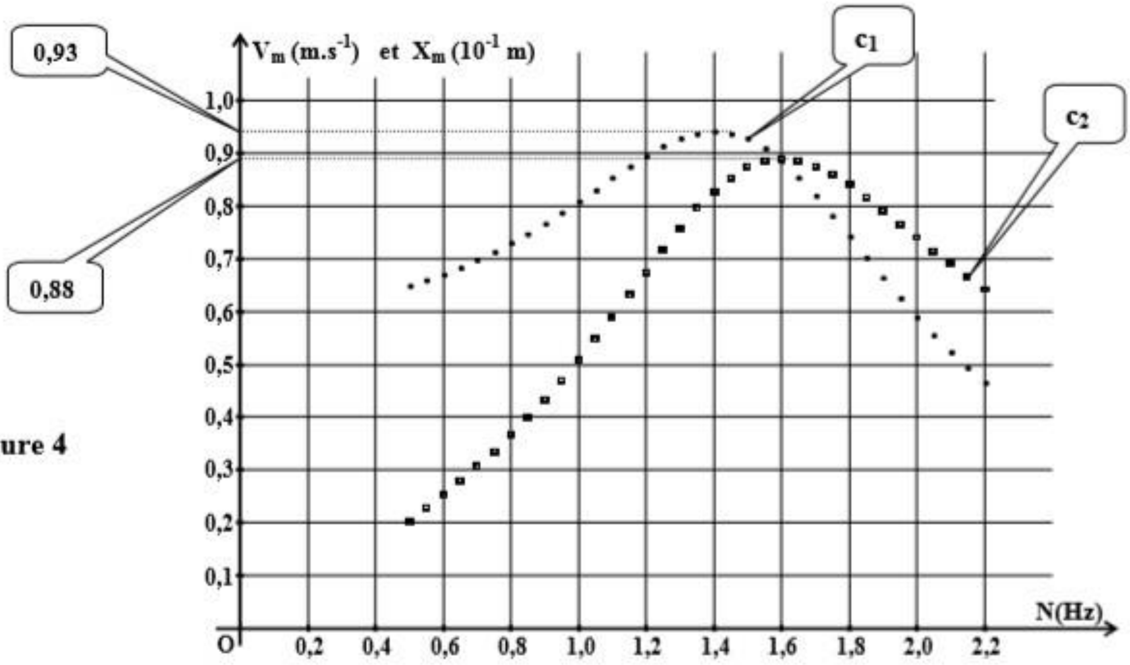

0,93
0,88
V_m (m.s^{-1}) et X_m (10^{-1} m)
c1
c2
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
O
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
N(Hz)

figure 4

Exercice n°3

Le pendule élastique de la **figure 6** est constitué d'un solide (S) de masse **m** et de centre d'inertie **G**, attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur $\mathbf{k = 12\ N.m^{-1}}$. L'autre extrémité du ressort est reliée à un support fixe.

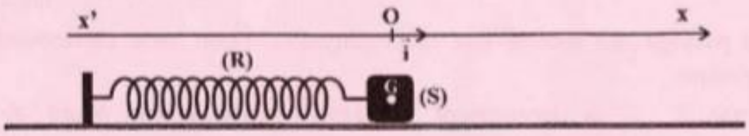


figure 6

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de (S) coïncide avec l'origine **O** du repère $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}})$.

A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_{max} \sin(2\pi N t + \frac{\pi}{2})\ \vec{i}$, d'amplitude $\mathbf{F_{max}}$ constante et de fréquence **N** réglable.

Au cours de son mouvement, (S) est soumis à des frottements de type visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie **G** de (S). On donne $\mathbf{h = 59{,}7.10^{-2}\ kg.s^{-1}}$.

La position de **G** est, à chaque instant, repérée par son abscisse **x(t)** dans le repère $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}})$.

L'équation différentielle régissant les oscillations de **G** est donnée par : $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$.

Cette équation admet une solution de la forme : $x(t) = X_{max} \sin(2\pi N t + \varphi_x)$.

On ajuste la fréquence de la force excitatrice à une valeur $\mathbf{N_1 = 2\ Hz}$, puis on enregistre, à l'aide d'un dispositif approprié, l'évolution au cours du temps de la valeur instantanée $T(t) = T_{max} \sin(2\pi N_1 t + \varphi_T)$ de la tension du ressort. La courbe obtenue est représentée sur la **figure 7**.

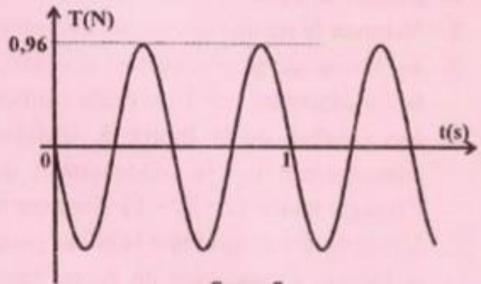


figure 7

1- a- En exploitant la courbe de la **figure 7**, déterminer la valeur de l'amplitude $\mathbf{T_{max}}$ ainsi que celle de la phase initiale $\boldsymbol{\varphi_T}$ de la tension **T(t)**.

b- En déduire les valeurs de $\mathbf{X_{max}}$ et $\boldsymbol{\varphi_x}$.

2- a- Compléter, à l'échelle **0,1 N ↔ 1 cm**, la construction de Fresnel de la **figure 8 de la page 5/5**, qui correspond à l'équation décrivant l'état de l'oscillateur pour $N = N_1$.

b- En déduire que l'oscillateur est le siège d'une résonance de vitesse.

c- Déterminer les valeurs de **m** et $\mathbf{F_{max}}$.

Echelle : 0,1 N ↔ 1 cm

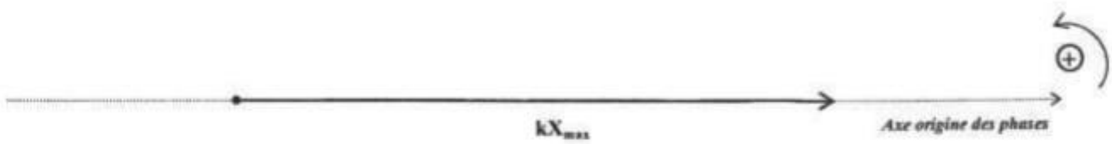


figure 8

Correction

Exercice 2 (4 points)
1- a- $T_{max} = 0,96$ N ; à $t = 0$, $T(0) = 0$ et $\frac{dT}{dt}$ p 0 $\Rightarrow \varphi_T = \pi$ rad
b – $T(t) = -kx(t) \Rightarrow \begin{cases} T_{max} = kx_{max} \\ \varphi_T = \varphi_x + \pi \end{cases}$; soit: $\begin{cases} x_{max} = 8 \text{ cm} \\ \varphi_x = 0 \end{cases}$
2- a- $2\pi N_1 hX_{max} = 0,6$ N $\leftrightarrow$ 6 cm
b- D'après la construction de Fresnel : $kX_{max} = 4\pi^2 N_1^2 X_{max} \Rightarrow 4\pi^2 N_1^2 = \frac{k}{m} = 4\pi^2 N_0^2 \Rightarrow N_1 = N_0$ ce qui correspond à la résonance de vitesse

c- $4\pi^2 N_1^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m = \frac{K}{4\pi^2 N_1^2}$ A.N: m = 76 g ;

graphiquement $F_{max} = 0,6$ N

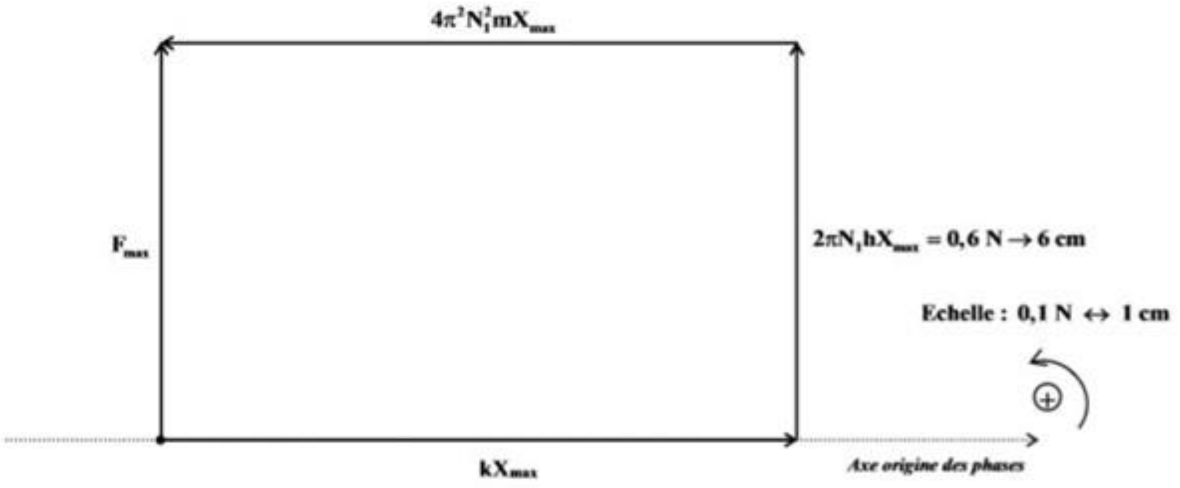


figure 8

Exercice n°4

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de centre d'inertie G et de masse **m**, attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, d'axe horizontal, de raideur **k** et de masse négligeable devant **m**. L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe.

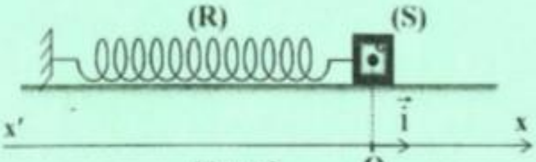


Figure 2

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) est confondu avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par un axe horizontal x'x, comme l'indique la figure 2. Au cours de son mouvement, G est repéré par son élongation x(t) dans le repère $(O, \vec{i})$; sa vitesse instantanée est notée v(t).

L'amortissement du mouvement ainsi que les forces de frottement sont supposés négligeables.

1) On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre jusqu'au point M_0 d'abscisse $x_0 < 0$, puis on le lâche, à l'instant t = 0, avec une vitesse initiale v_0.

a- En utilisant la méthode dynamique, montrer que les oscillations de G sont régies par l'équation différentielle: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$; où ω_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.

b- Exprimer l'énergie mécanique E du système {(S) + (R)} en fonction de **k**, **m**, **x(t)** et **v(t)**.

c- Déduire que le système {(S) + (R)} est conservatif.

2) Un dispositif approprié d'acquisition de données permet d'enregistrer simultanément l'évolution de la vitesse v(t) de G ainsi que celle de l'énergie cinétique $E_c(t)$ du solide (S) en fonction du temps et de tracer les courbes (I) et (II) de la figure 3.

En exploitant les courbes de la figure 3 :

a- justifier que la courbe (I) correspond à $E_c(t)$;

b- montrer que $\omega_0 = 20\ rad.s^{-1}$ et déduire l'amplitude du mouvement oscillatoire de G ;

c- déterminer k et montrer que m = 100 g ;

d- chercher x_0 et déduire que $v_0 = -0{,}8\ m.s^{-1}$;

e- déterminer la phase initiale de la vitesse v(t) et en déduire celle de l'élongation x(t).

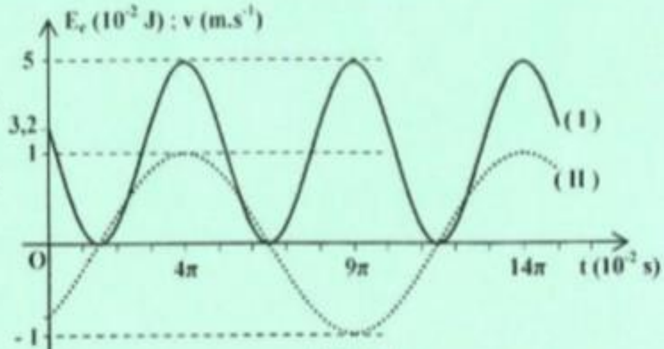


Figure 3

3) Le solide (S) est maintenant soumis à des actions de frottement visqueux dont la résultante est équivalente à une force unique de la forme: $\vec{f} = -h\vec{v}$; où **h** est une constante positive appelée coefficient de frottement et $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse instantanée de G. De plus, le solide (S) subit une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi Nt)\,\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence N réglable.

A l'aide d'un dispositif approprié, on suit l'évolution de l'amplitude X_m de l'élongation x(t) de G en fonction de la fréquence N de la force excitatrice. On constate alors que cette grandeur atteint une valeur maximale $X_{m_1} = 9{,}0\ cm$ pour une valeur particulière $N_1 = 2{,}70$ Hz de la fréquence N.

On rappelle que l'amplitude X_m peut s'exprimer par la relation: $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{4\pi^2h^2N^2 + (k - 4\pi^2N^2m)^2}}$.

a- Nommer le phénomène physique qui se produit à la fréquence N_1.

b- Montrer que la fréquence N_1 vérifie la relation: $N_1^2 = N_2^2 - \frac{h^2}{8\pi^2m^2}$; où N_2 est une fréquence que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.

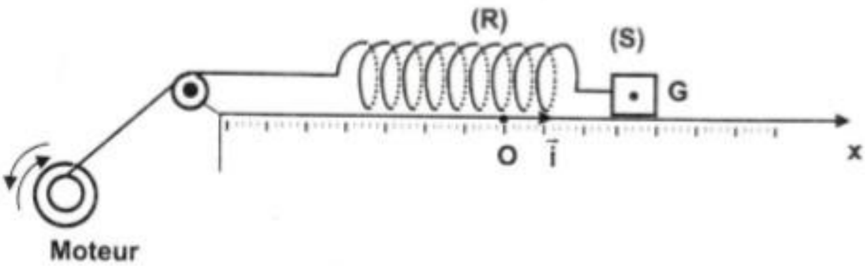
c- Indiquer ce que représente la fréquence N_2 pour le système {(S) + (R)}.

d- Calculer **h** et F_m.

Exercice n°5

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort (**R**), à spires non jointives, de masse supposée négligeable et de raideur **k = 25 N.m^{-1}**, lié à un solide **(S)** supposé ponctuel de masse **m** qui peut se déplacer sur un plan horizontal. A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide coïncide avec l'origine **O** d'un repère (**O**, $\vec{i}$). La position du solide à un instant **t** donné est repérée par son abscisse **x(t)** dans ce repère (**figure 2**). Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$; où **h** est une constante positive et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de **G**. Un dispositif approprié (moteur) permet d'exercer sur **(S)** une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m.\sin(2\pi Nt).\vec{i}$, d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable, de façon que $x(t) = X_m.\sin(2\pi Nt + \varphi_x)$; où X_m est l'amplitude et φ_x est la phase initiale de **x(t)**.

Figure 2



1) Une étude expérimentale a permis de tracer les courbes **(a)** et **(b)**, données par **la figure 3**, dont l'une représente l'évolution de l'élongation **x(t)** et l'autre celle de **F(t)**.

a- Justifier que la courbe **(a)** correspond à **x(t)**.

b- Déterminer les valeurs de X_m, F_m et **N**.

c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x$;

où φ_F est la phase initiale de $\vec{F}(t)$.

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie **G** du solide **(S)**, en fonction de **x** et de ses dérivés première et seconde.

3) a- Faire la construction de Fresnel associée à l'équation différentielle précédente.

b- En déduire les valeurs de la constante **h** et de la masse **m**.

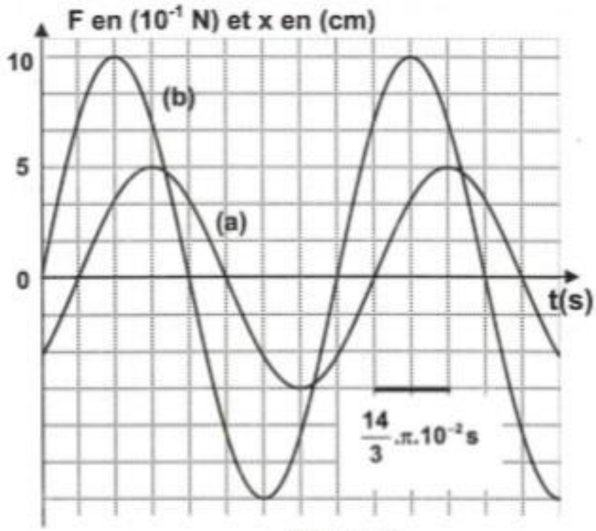


Figure 3

c- Montrer que $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{(2\pi Nh)^2 + (k - 4\pi^2N^2m)^2}}$

4) Pour une valeur N_1 de la fréquence **N**, le déphasage est : $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

a- En se référant à une analogie formelle électrique-mécanique, montrer que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

b- En déduire la valeur de N_1.

5) La masse **m** ne peut rester solidaire du ressort que pour une valeur de la tension du ressort ne dépassant pas **1,5** N. On fait diminuer la valeur de **h** jusqu'à atteindre la valeur h_2 **= 0,8 N.m^{-1}.s**. La résonance d'élongation est obtenue pour une fréquence N_2 **= 2,35 Hz**.

a- Déterminer la valeur de l'allongement maximal X_{2m} du ressort pour **N = N$_2$**.

b- Préciser, en le justifiant, si le solide reste attaché au ressort, dans ce cas.

Correction

1 – a –

1ère méthode : D'après le principe de cause à effet, F(t) est toujours en avance de phase par rapport à x(t). La courbe (b) est celle de F(t) et donc la courbe (a) est celle de x(t).

2ème méthode : La phase initiale de F(t) est nulle. Donc à t = 0 F(t) est nulle et F(t) est croissante. La courbe qui obéit à ces conditions est la courbe (b).Donc, x(t) correspond à la courbe (a).

1 – b –

$X_{max} = 5\ cm = 5.10^{-2} m.$

$F_{max} = 1\ N.$

$N = 1{,}705\ Hz.$

1 – c –

$$\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = -\frac{2.\pi}{T}.(t_F - t_x) = -\frac{2.\pi}{T}.\left(-\frac{T}{8}\right) = \frac{\pi}{4}\ rad.$$

2 –

Système $\{solide\}$.

Bilan des forces : $\vec{P}; \vec{R}_N; \vec{T}; \vec{f}$.

Il faut représenter les forces.

R.F.D : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T} + \vec{f} = m.\vec{a}$.

La projection sur l'axe du mouvement$(O; \vec{i})$:

$-K.(x_B - x_A) - h.v = m.a$

$F = K.x_A = m.a + h.v + K.x_B$.

x_B: $L'abscissedu\ mouvement\ de\ (S). On\ va\ le\ noter\ \ x.$

L'équation différentielle devient alors :

$m.a + h.v + K.x = F.$ avec $F(t) = F_{max}.\sin(\omega.t + \varphi_F)$.

3 – a –

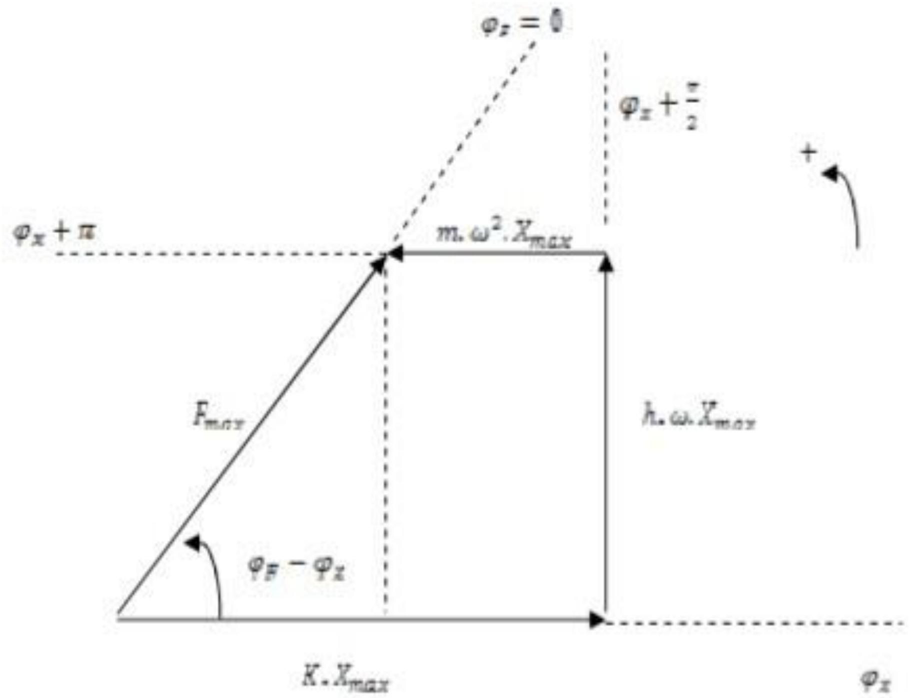
La solution de cette équation différentielle est : $x(t) = X_{max}.\sin(\omega.t + \varphi_x)$.

$K.x = K.X_{max}.\sin(\omega.t + \varphi_x) \quad \leftrightarrow \vec{u}_1(K.X_{max}; \varphi_x)$

$h.v = h.\omega.X_{max}.\sin\left(\omega.t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \leftrightarrow \vec{u}_2(h.\omega.X_{max}; \varphi_x + \frac{\pi}{2})$

$m.a = m.\omega^2.X_{max}.\sin(\omega.t + \varphi_x + \pi) \quad \leftrightarrow \vec{u}_3(m.\omega^2.X_{max}; \varphi_x + \pi)$

$F = F_{max}.\sin(\omega.t + \varphi_F) \quad \leftrightarrow \vec{u}_c = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \ \ (F_{max}; \varphi_F)$



3 – b –

- $sin(\varphi_F - \varphi_x) = sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{h.\omega.X_{max}}{F_{max}}$

$$h = \frac{F_{max}.\sin(\varphi_F - \varphi_x)}{\omega.X_{max}}$$

$A.N: h = 1,32\ kg.s^{-1}.$

- $cos(\varphi_F - \varphi_x) = cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{(K.X_{max} - m.\omega^2.X_{max})}{F_{max}}$

$$m = \frac{K - \frac{F_{max}cos(\frac{\pi}{4})}{X_{max}}}{\omega^2}$$

$A.N: m = 95,5.10^{-3}kg. = 95,5\ g.$

3 – c –

On applique Pythagore dans le triangle rectangle : $F_{max}^2 = [(K - m.\omega^2)^2 + h^2.\omega^2].X_{max}^2$

$X_{max} = \frac{F_{max}}{\sqrt{h^2.\omega^2 + (K - m.\omega^2)^2}}$. Or $\omega = 2.\pi.N$ alors $X_{max} = \frac{F_{max}}{\sqrt{(h.2.\pi.N)^2 + (K - m.4.\pi^2.N^2)^2}}$.

4 – a –

Pour $N = N_1$ on a $\varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}\ rad$. En électricité lorsque le circuit est en état de résonance d'intensité $\varphi_u - \varphi_i = 0\ rad$. Comme $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$ alors la résonance d'intensité correspond à $\varphi_u - \varphi_q = \frac{\pi}{2}\ rad$. Par analogie électrique – mécanique $u(t) \leftrightarrow F(t)$ et $q(t) \leftrightarrow x(t)$ donc $\varphi_u \leftrightarrow \varphi_F$ et $\varphi_q \leftrightarrow \varphi_x$ par suite $\varphi_u - \varphi_q \leftrightarrow \varphi_F - \varphi_x$ et la résonance d'intensité $\leftrightarrow$ la résonance de vitesse.

4 – b –

A la résonance de vitesse $N_1 = N_0 = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{\frac{m}{K}}}$

A .N : $N_1 = 2,587\ Hz.$

5 – a –

$$X_{2max} = \frac{F_{max}}{\sqrt{(h_2.2.\pi.N_2)^2 + (K - m.4.\pi^2.N_2^2)^2}}$$

A.N :

$X_{2max} = 7,9.10^{-2}\ m = 7,9\ cm \approx 8\ cm.$

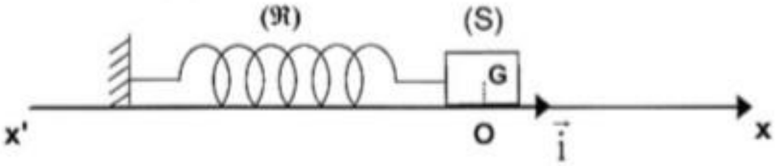
5 – b –

$T_{max} = K.X_{2max}$

A.N : $T_{max} = 25,8.10^{-2} = 2\ N > 1,5\ N$. Le solide ne reste plus attaché au ressort.

Exercice n°6

On dispose d'un pendule élastique horizontal comportant un ressort **($\Re$)** et un solide **(S)** de masse m. L'une des extrémités de **($\Re$)** est fixe tandis que l'autre extrémité est attachée à **(S)**, comme le montre la figure ci-dessous. Le solide **(S)** est susceptible de glisser sur un plan horizontal, dans le repère galiléen $(O, \vec{i})$ confondu avec l'axe du ressort et dont l'origine **O** est la position de repos du centre d'inertie **G** de **(S)**. Le ressort **($\Re$)** a une raideur **k** et une masse négligeable devant celle de **(S)**.



I- On écarte le solide **(S)** de sa position de repos O en le déplaçant, suivant l'axe **x'x**, de manière à ce que le ressort **($\Re$)** se comprime d'une longueur **a**. A l'instant **t = 0 s**, on l'abandonne à lui-même, sans vitesse initiale.

Avec un dispositif approprié, on enregistre dans le repère $(O, \vec{i})$ le diagramme de mouvement du centre d'inertie **G** de **(S)**. Ainsi, on obtient l'une des courbes sinusoïdales de la figure 1 **(feuille annexe, page 5/6)**.

1) a- De telles oscillations de **(S)** sont dites libres. Justifier cette qualification.

b- Montrer que ces oscillations sont non amorties.

2) a- Calculer la phase initiale φ des oscillations de **(S)** et en déduire que c'est la courbe **2** qui représente le diagramme du mouvement de **(S)**.

b- Montrer que l'amplitude des oscillations est égale à la longueur **a** dont on a comprimé initialement le ressort.

- Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude **a** et celle de la période T_o des oscillations.

c- Calculer la valeur de la raideur **k** du ressort sachant que **m = 289 g**.

II- Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis maintenant à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** et $\vec{v}$ sont respectivement le coefficient de frottement et le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie **G** de **(S)**.

Pour entretenir ses oscillations, on soumet **(S)**, à l'aide d'un dispositif approprié, à une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_F)\vec{i}$. Ainsi, **(S)** se met à osciller à la période **T** et avec une amplitude X_m. Pour une valeur T_1 de **T**, les chronogrammes de **x(t)** et de **F(t)** sont représentés par les courbes sinusoïdales **I** et **II** de la figure 2 **(Annexe, page 5/6)**.

1) a- Sachant que l'élongation **x(t)** ne peut évoluer qu'en retard de phase par rapport à **F(t)**, montrer, parmi les courbes **I** et **II**, que c'est la courbe **I** qui représente **F(t)**.

b- A l'aide des graphiques de la même figure 2, écrire les expressions de **x(t)** et de **F(t)** tout en précisant les valeurs de leur fréquence N_1, de leur valeur maximale et de leur phase initiale.

2) a- Montrer qu'avec des excitations de période **T**, l'élongation **x** de **G**, sa vitesse instantanée $v = \frac{dx}{dt}$ et son accélération $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, vérifient à tout instant t la relation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_F).$$

b- La construction de Fresnel inachevée de la figure 2 de la feuille annexe **(page 6/6 : feuille à remplir et à rendre avec la copie)** correspond aux oscillations forcées du pendule élastique à la période T_1. Compléter cette construction tout en l'annotant.

3) Déterminer (sans calcul) le sens dans lequel il faut faire varier la période **T** de l'excitateur à partir de la valeur T_1 pour obtenir une résonance d'élongation.

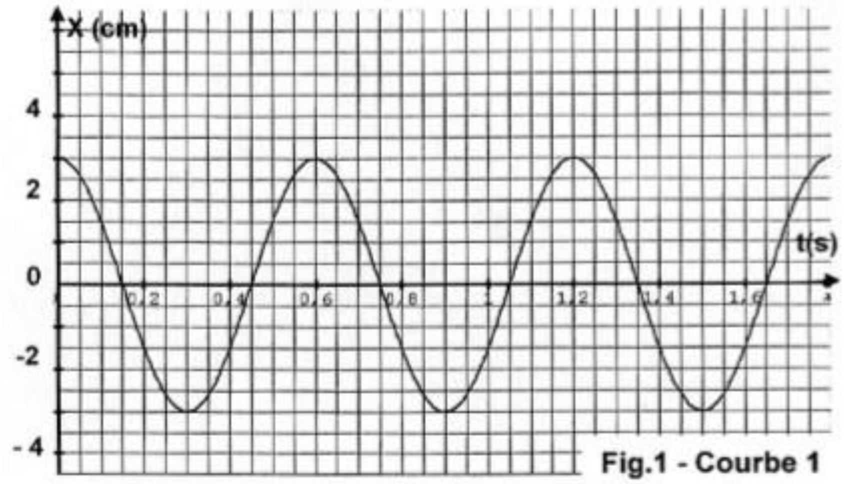


Fig.1 - Courbe 1

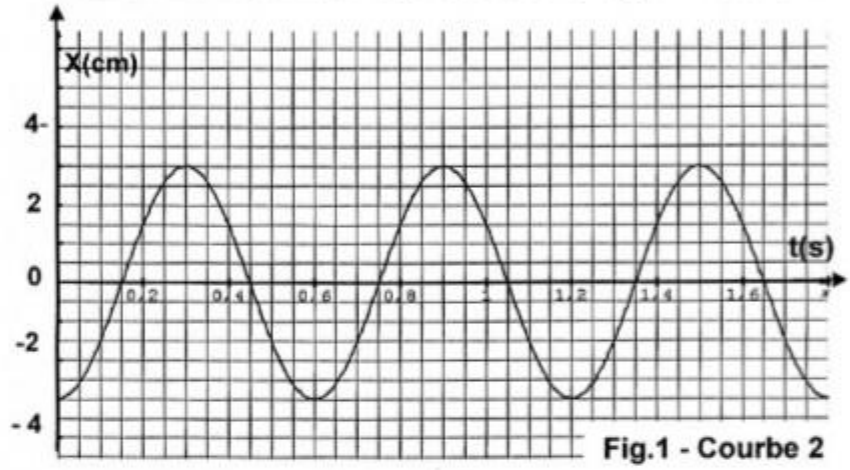


Fig.1 - Courbe 2

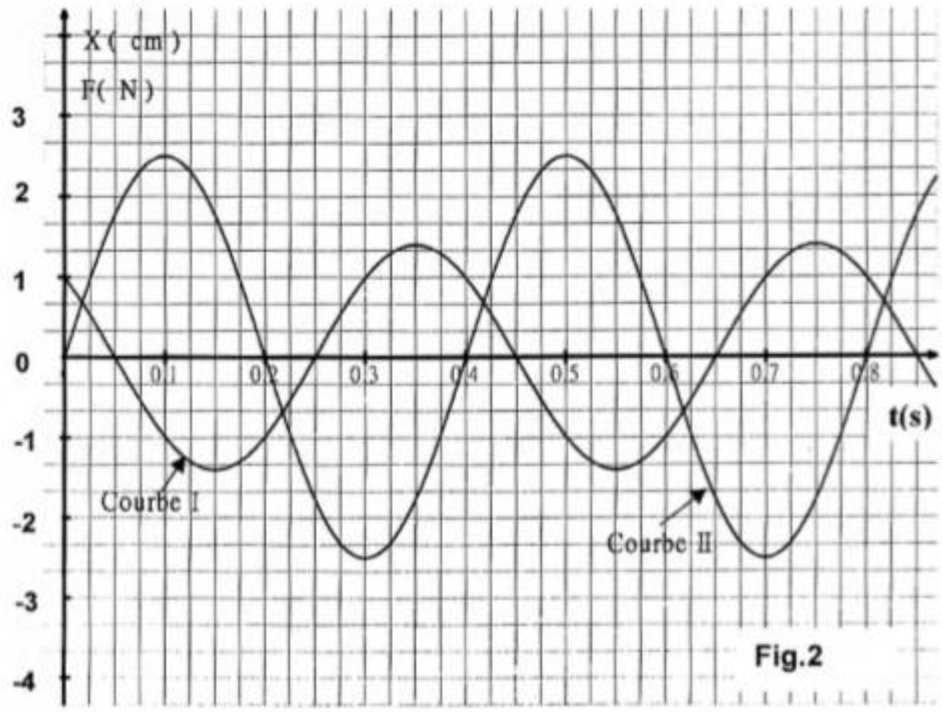


Fig.2

Correction

I.1-a) Les oscillation décrites sont dites libres parce qu'elles sont produites sans que le solide (S) soit soumis à des excitations.

b) Le diagramme du mouvement de (S) est une sinusoïde, ce qui traduit des oscillations d'amplitude constante. Donc, ces oscillations sont non amorties.

2- a) Les oscillations de (S) étant sinusoïdales, l'élongation de son centre d'inertie G s'écrit : $x(t) = X_m\sin(\omega_o t + \varphi)$.
Donc, sa vitesse instantanée s'écrit :
$v(t) = \omega_o X_m\cos(\omega_o t + \varphi)$.
A t = 0 s, $v = \omega_o X_m\cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0$ car ω_o et X_m sont non nuls.

$$\Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}\,\text{rad ou bien } -\frac{\pi}{2}\,\text{rad}.$$

Or, à t = 0 s, $x = X_m\sin\varphi = -a \Rightarrow \sin\varphi < 0$.

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad}}$$

Il s'en suit, à t = 0 s, $x = -X_m$.
Donc, c'est la courbe 2 de la figure 1 de la page 5/6 de la feuille annexe qui représente le diagramme du mouvement de (S).

b) – On a : $x(0) = X_m\sin\varphi = -a$ et

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad} \Rightarrow \mathbf{X_m = a}$$

– Sur la courbe 2 de de la figure 1 de la page 5/6 de la feuille annexe, on constate que tous les extrémums sont égaux à 3 cm en valeur absolue.

$$\Rightarrow \mathbf{a = 3\ cm}$$

Autre méthode :
A t = 0 s, $x = -X_m$.
Or, on relève sur la même courbe 2, la valeur x(0) = - 3 cm ⇒ **a = 3 cm**.

Détermination de la période T_o :
Déterminer graphiquement T_o revient à mesurer la distance D séparant sur la courbe 2, deux extrémums consécutifs de même nature (deux maximums ou bien deux minimums) ou bien deux zéros consécutifs et au niveau desquels x varie dans le même sens.
Application : D = 3 div → T_o
Or : 1 div → 0,2 s (d'après la graduation de l'axe du temps)

$$\Rightarrow \mathbf{T_o = 0,6\ s}$$

c) $T_o = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Leftrightarrow k = \dfrac{4\pi^2 m}{T_o^2}$

A.N. : $k = 31,66\ N.m^{-1} \approx 31,7\ N.m^{-1}$

II.1-a) Deux maximums de la courbe I et de la courbe II les plus proches l'un de l'autre sont décalés de 1,5 div.

Or, 1 div représente 0,1 s (d'après la graduation de l'axe du temps).
Donc, les maximums de la courbe I sont toujours atteints à 0,15 s avant ceux de la courbe II, ce qui traduit une avnce de phase de la courbe I par rapport à la courbe II.
Donc, c'est bien la courbe I qui représente la force excitatrice F(t).
Remarques :

* La même démonstration peut être faite par recours à des minimums au lieu de maximums.
* Deux maximums (ou minimums) de deux sinusoïdes de même période T, les plus proches l'un de l'autre, ne peuvent être décalés d'un intervalle de temps supérieur à la moitié de la période T.

b) $F(t) = F_m \sin(\frac{2\pi}{T_1}t + \varphi_F)$

$x(t) = X_m \sin(\frac{2\pi}{T_1}t + \varphi_x)$

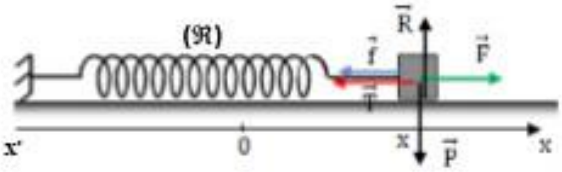
* Avec la même méthode utilisée dans I.2-b, on trouve $\mathbf{T_1 = 0,4\ s \Leftrightarrow N_1 = 2,5\ Hz}$
* Calcul de F_m :
(1 + 1/3 + 1/5x1/3) div = 1,4 div → F_m
Or, 1 div → 1 N ⇒ $\mathbf{F_m = 1,4\ N}$
* Calcul de X_m : 2,5 div → X_m
Or, 1 div → 1 cm ⇒ $\mathbf{X_m = 2,5\ cm}$
* $\mathbf{\varphi_x = 0\ rad}$ car, à t = 0 s, x = 0 en croissant.
* Calcul de $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_F$
Décalage horaire de 0,15 s → $\Delta\varphi$
Décalage horaire de T/2 → π rad
⇒ $\Delta\varphi = -\ 0,3\pi/T$
A.N. : $\Delta\varphi = -\ 3\pi/4$ rad
⇒ $\mathbf{\varphi_F = +\ 3\pi/4\ rad}$

On a finalement :

$$\mathbf{F(t) = 1,4.\sin(5\pi t + \frac{3\pi}{4})}$$

$$\mathbf{x(t) = 2,5.10^{-2}\sin 5\pi t}$$

2- a) Bilan des forces extérieures s'exerçant sur (S) : son poids $\vec{P}$; la réaction normale $\vec{R}$ du plan d'appui horizontal ; la force de frottement $\vec{f}$; la tension $\vec{T}$ du ressort ; la force excitatrice $\vec{F}$.



Le vecteur force $\vec{f}$ est représenté avec un sens contraire à celui de $\vec{i}$ en supposant que dans cette position x de (S), le vecteur vitesse $\vec{v}$ a le sens de $\vec{i}$.
D'après le théorème du centre d'inertie, on écrit pour (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} \quad m\vec{a}$$

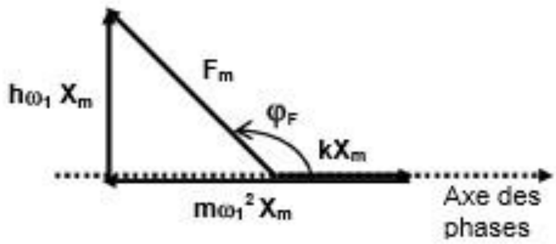
Par projection orthogonale sur l'axe (Ox), on obtient : -k .x - h.v + F = m. a.

Avec $F = F_m \sin(\frac{2\pi}{T_1}t + \varphi_F)$, $v = \frac{dx}{dt}$ et

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$, on trouve :

$$\mathbf{m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_F)}.$$

b- Construction de Fresnel



3- On sait que la résonance d'élongation se produit à une période T légèrement supérieure à la période propre T_0 de l'oscillateur. Or, $T_1 = 0,4$ s et $T_o = 0,6$ s
Donc, pour atteindre la résonance à partir de la valeur T_1, il faut augmenter la période des excitations.
Autre méthode :
A la résonance d'élongation, ω est légèrement inférieure à ω_0.
Or, $\cos\varphi_F = \frac{k - m\omega^2}{F_m}$. Par suite, cosφ est légèrement supérieur à zéro.
Donc, φ_F est légèrement inférieur à 90° à la résonance.
Pour T_1, $\varphi_F = +\ 3\pi/4$ rad ⇒ Il faut diminuer φ_F. **ça revient à diminuer ω, c'est-à-dire augmenter T.**

Exercice n°7

*Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide **(S)** de masse **m**, fixé à un ressort à spires non jointives, de raideur **k** et de masse négligeable. Le solide **(S)** se déplace, sans frottement, sur un guide horizontal **(T)**. La position du centre d'inertie **G** de **(S)** est repérée par son abscisse $x(t)$ sur un axe horizontal **(x'Ox)** dans le repère $(O,\vec{i})$. L'origine des abscisses est confondue avec **G** lorsque le solide **(S)** est en équilibre (figure **1**).*

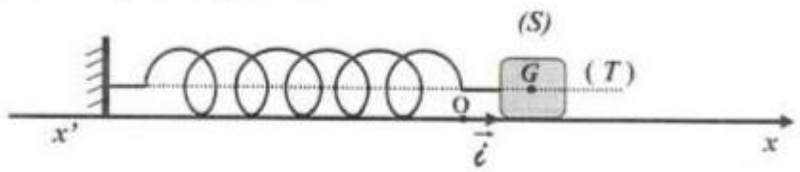


Figure 1

A- *Le solide (S), à un instant $t = 0s$, est écarté de **2 cm** de sa position d'équilibre puis lancé avec une vitesse initiale v_0. Les variations de $x(t)$ sont données par la figure 2.*

1-a- *Etablir l'équation différentielle en $x(t)$ régissant le mouvement de (S).*

b- *Vérifier que : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de cette équation différentielle, en précisant l'expression de ω_0.*

2- *Par exploitation de la courbe de la figure **2**:*

a- *déterminer l'amplitude X_m, la pulsation ω_0 et la phase initiale φ_x.*

b- *déduire la valeur de la raideur **k** du ressort. On prendra $m = 160$ g.*

c- *déterminer le sens et la valeur de la vitesse de (S) à l'instant $t = 0$ s.*

3-a- *Montrer que l'énergie mécanique **E**, du système {ressort, solide S} est constante et calculer sa valeur.*

b- *Déduire la valeur de l'énergie cinétique E_c du solide (S) à l'instant $t = 0,7$ s.*

B- *le solide **(S)** est maintenant soumis à une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi N t)\vec{i}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** est une constante positive. Les variations de l'élongation $x(t)$ et de la force excitatrice $F(t)$ sont données par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de la figure **3** de la page **5/5**.*

1- *Identifier, en le justifiant, la courbe qui correspond à la variation de $x(t)$.*

2- *Déterminer graphiquement :*

a- *les valeurs des amplitudes X_m et F_m.*

b- *la phase initiale φ_x de l'élongation et la fréquence **N** de la force excitatrice.*

3-a- *Etablir l'équation différentielle en $x(t)$ qui régit les oscillations de (S).*

b- *Faire la construction de Fresnel relative à cette équation différentielle en $x(t)$.*

c- *En déduire, par exploitation de cette construction, la valeur de la constante **h**.*

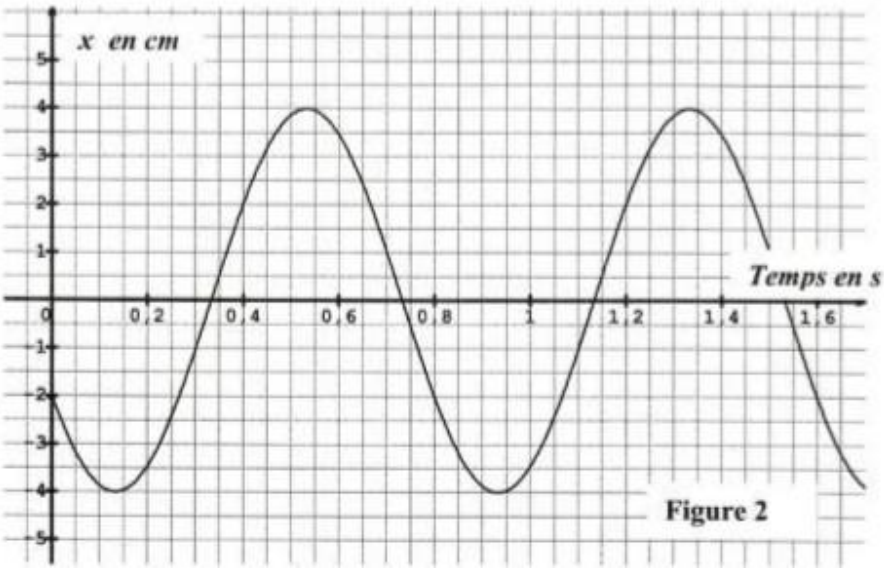


Figure 2

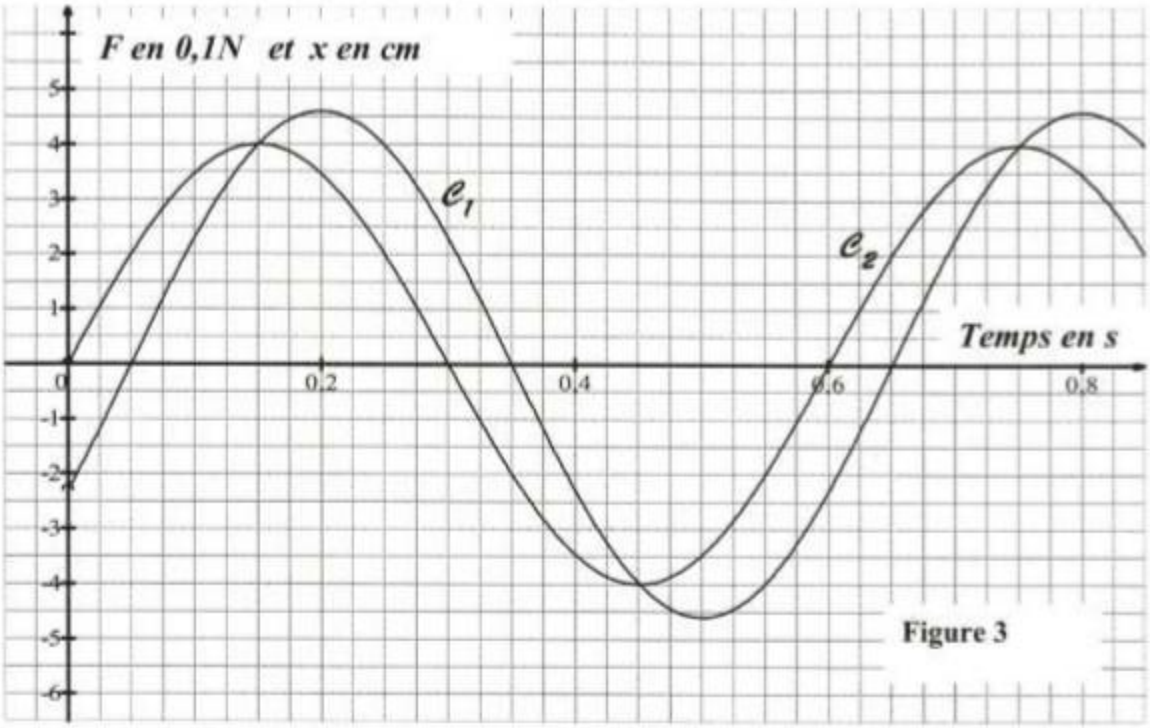


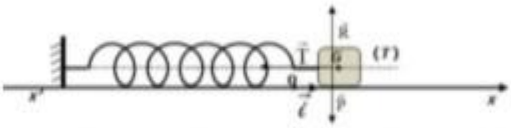
Figure 3

Correction

L'équation différentielle en x(t) régissant le mouvement du solide (S) :

Bilan des forces : la tension $\vec{T}$, la réaction $\vec{R}$ et le poids $\vec{P}$

La représentation des forces :



$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ avec $\vec{T} = -\,kx\,\vec{i}$

Par projection sur (x'x), on aura $\mathbf{m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$, d'où $\mathbf{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0}$ **(1)**

On calcule $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ et on remplace **x(t)** et $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ par leur expression dans l'équation

(1) , on aura $-\omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) + \dfrac{k}{m} X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) = 0$; si $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ soit

A2-a	L'amplitude **Xm = 4.10⁻²m**, la période $\mathbf{T_0 = 0,8s}$. La pulsation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \mathbf{2,5\pi\ rad.s^{-1}} = 7,85\ rad.s^{-1}$ $\left.\begin{array}{l} x(t=0) = Xm\sin(\varphi_x) \\ x(t=0) = -\frac{1}{2}Xm \end{array}\right\}$ sin(φ_x) = - ½ $\varphi_x = -\pi/6rad$ **ou bien** $\varphi_x = 7\pi/6rad$ La courbe est décroissante à l'origine des temps ; $\varphi_x = 7\pi/6rad$.
A2-b	La valeur de la raideur **k** du ressort : On a $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $k = m\omega_0^2$. AN:**k = 9,85N.m⁻¹**
A2-c	(S) débute son mouvement dans le sens négatif (voir figure 2) $v(t=0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \omega_0 Xm\sin(-\pi/3)$, $\mathbf{v(t=0) = -27,19.10^{-2}\ m.s^{-1}}$; $\Vert \overrightarrow{v_{(t=0)}} \Vert = \mathbf{27,19.10^{-2}\ m.s^{-1}}$
A3-a	Le système {ressort, solide} n'est soumis à aucune force dissipative, l'énergie mécanique **E** est constante. $\mathbf{E = ½\ kX_m^2 = 7,9\ 10^{-3}\ J}$.
A3-b	A t=0,7s, x=1cm ; l'énergie cinétique Ec = E –Ep = E – ½ kx² = **7,5.10⁻³ J**.
B1-	La courbe $\mathbf{C_2}$ correspond à la variation de F(t) car la force excitatrice est toujours en avance par rapport à **x(t)**. Ainsi la courbe $\mathbf{C_1}$ correspond à la variation de x(t).
B2-a	L'amplitude **Xm = 4,6.10⁻² m** et l'amplitude **Fm = 0,4N**.
B2-b	**b.** Le déphasage $\lvert\Delta\varphi\rvert = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}.\frac{T}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad. $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_x = -\pi/6\ rad$. La période T = 0,6s **N= 1,67 Hz**.
B3-a	Les forces appliquées sur le système {S} sont la tension $\vec{T}$, la réaction $\vec{R}$, la force excitatrice $\vec{F}$, la force de frottement $\vec{f}$ et le poids $\vec{P}$. Application du théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$ L'équation : $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = Fm\sin(\omega t)$ On aura aussi : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_m}{m}\sin(\omega t)$.
B3-b	construction de Fresnel
B3-c	**La valeur de h :** $\sin(\Delta\varphi) = \frac{h\omega X_m}{F_m} \Rightarrow h = \frac{F_m \sin\Delta\varphi}{\omega X_m}$

Exercice n°8

Le pendule élastique de la **figure 5 de la page 6/6 (à rendre avec la copie)** est constitué d'un ressort hélicoïdal à spires non jointives, de constante de raideur **k = 12 N.m^{-1}**, d'axe horizontal et de masse négligeable. L'une de ses extrémités est fixée à un support immobile. A l'autre extrémité est accroché un solide (S), de centre d'inertie G et de masse m, pouvant osciller selon l'axe horizontal x'x. Au cours de son mouvement oscillatoire, (S) est soumis à des frottements de type visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$; où **h** est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie G de (S).

A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(2\pi Nt)\,\vec{i}$, d'amplitude F_m constante et de fréquence N réglable ; $\vec{i}$ étant le vecteur directeur unitaire de l'axe x'x.

La position de G est repérée par son abscisse **x** dans le repère $(O, \vec{i})$. L'origine O correspond à la position de G lorsque (S) est au repos.

L'élongation $x(t) = X_m\sin(2\pi Nt + \varphi_x)$ de G, est une solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t) \qquad \text{(I)}$$

1- La courbe de la **figure 6 de la page 6/6**, représente l'évolution au cours du temps de l'élongation **x** de G lorsque la fréquence de l'excitateur est ajustée à une valeur $N = N_1$.

a- En exploitant la courbe de la **figure 6**, déterminer les valeurs de la fréquence N_1, de l'amplitude X_{m_1} et de la phase initiale φ_{x_1} de l'élongation **x(t)**.

b- Sur la **figure 7 de la page 6/6**, est représenté le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OA}$ associé à la fonction $Y(t) = \left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k\,x(t)\right)$ pour la fréquence $N = N_1$. Compléter la construction de Fresnel relative à l'équation (I) en représentant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OB}$, associés respectivement, à $h\frac{dx(t)}{dt}$ et à F(t).

c- En exploitant la construction de Fresnel, déterminer les valeurs de F_m, **h** et **m**.

2- Dans ce qui suit, on prendra: **m = 0,08 kg**.

Pour une valeur particulière N_2 de la fréquence N de la force excitatrice, la fonction Y(t) s'annule.

a- Montrer que N_2 correspond à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur. Calculer sa valeur.

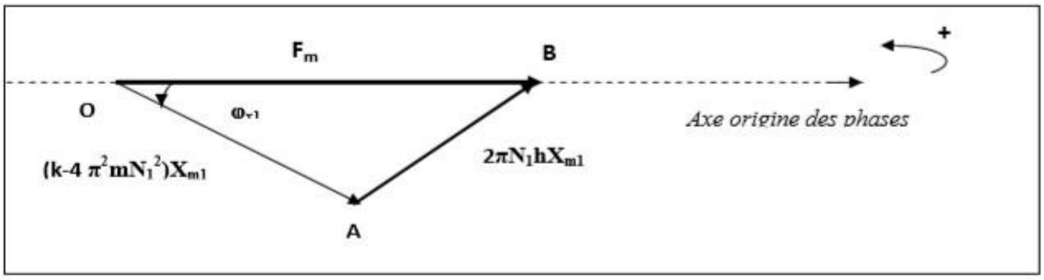
b- Déterminer en fonction de N_2, **h** et F_m, l'expression de l'amplitude X_{m_2} des oscillations de G à la fréquence N_2. Calculer sa valeur.

Correction

1) a- $N_1 = 1\text{Hz}$; $X_{m1} = 7{,}8.10^{-2}$ m.

à t=0, on a : $x = X_{m1}\sin\varphi_{x1} = -\frac{X_{m1}}{2}$ et $\frac{dx}{dt} > 0 \Longrightarrow \sin\varphi_{x1} = -\frac{1}{2}$ et $\cos\varphi_{x1} > 0$. D'où $\varphi_{x1} = -\frac{\pi}{6}$ rad.

b-



c- Fm = 0,78 N, $2\pi N_1hX_{m1} = 0{,}39$ N ; soit $h = \frac{0{,}39}{2\pi N_1 X_{m1}}$; <u>AN</u> : h = 0,796 kg.s^{-1}.

$(k-4\pi^2mN_1^2)X_{m1} = 0{,}68$ N, soit $m = \dfrac{k - \frac{0{,}68}{X_{m1}}}{4\pi^2N_1^2}$; <u>AN</u> : m = 0,083kg.

2) a- $Y(t) = 0 \Longleftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$. D'où $-4\pi^2mxN_1^2 + kx = 0 \Longrightarrow N_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = N_0$; <u>AN</u> : $N_2 = 1{,}95$ Hz.

b-L'équation (I) $\Longrightarrow h\frac{dx}{dt} = F(t) \Longrightarrow 2\pi N_2hX_{m2} = F_m \Longrightarrow X_{m2} = \frac{F_m}{2\pi N_2 h}$; AN : $X_{m2} = 8.10^{-2}$ m.

Exercice n°9

Partie A :

Un solide (C) de masse **m** et de centre d'inertie **G** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort (**R**), de masse négligeable, à spires non jointives et de raideur **k = 10 N.m⁻¹**. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le système (S) = {ressort (**R**) ; solide (**C**)} peut osciller sur un plan horizontal.

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide (C) coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par un axe horizontal **x'x**. Au cours de son mouvement, **G** est repéré par son abscisse **x** dans le repère $(O, \vec{i})$ (voir **figure 3**). Les frottements sont supposés négligeables.

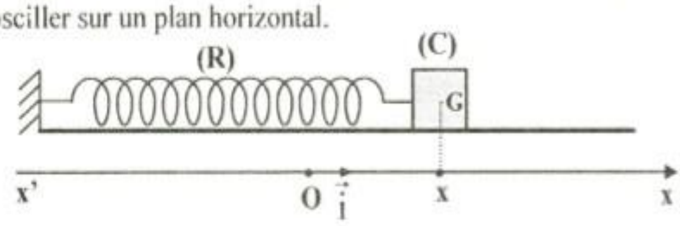


Figure 3

On écarte (C) de sa position d'équilibre jusqu'au point M_0 d'abscisse $x_0 < 0$. A l'instant $t = 0$, on l'abandonne avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, avec $v_0 > 0$. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} nulle.

1) a- Etablir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation **x** de **G** en fonction du temps.

b- En déduire que l'énergie mécanique **E** du système (S) se conserve au cours du temps.

2) La courbe (𝒞) de la **figure 4** représente l'évolution de l'une des deux formes d'énergie (cinétique ou potentielle élastique) du système (S) au cours du temps.

a- Justifier que cette courbe correspond à l'évolution de l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ du système (S).

b- On prendra $x(t) = X_m\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$, montrer que l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ du système (S) s'écrit : $E_{pe}(t) = \frac{1}{4}kX_m^2\left[1 - \cos\left[2(\omega_0 t + \varphi_x)\right]\right]$, où

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur (S),

X_m est l'amplitude du mouvement du centre d'inertie G de (C) et φ_x est sa phase initiale.

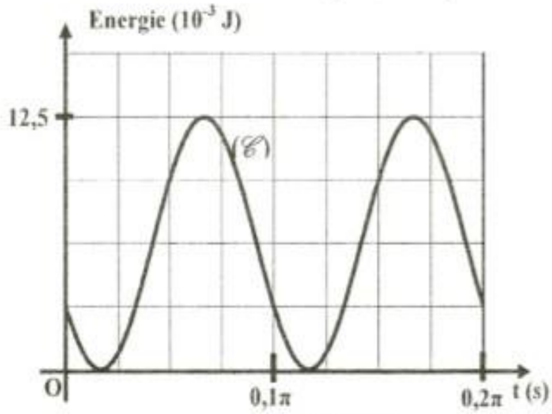


Figure 4

c- En exploitant la courbe (𝒞) de la **figure 4**, déterminer :

c_1- la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur (S) et en déduire la masse **m** du solide (C) ;

c_2- l'élongation x_0 et la vitesse v_0 du centre d'inertie **G** du solide (C) à l'instant initial $t = 0$;

c_3- la valeur de l'amplitude X_m du mouvement de **G** ainsi que celle de sa phase initiale φ_x .

Partie B :

On remplace le ressort (R) par un autre ressort (R_1) à spires non jointives, de raideur k_1 et de masse négligeable et on garde le même solide (C) de centre d'inertie **G** et de masse **m**. On obtient alors le système (S_1) = {ressort (R_1) ; solide (C)}. A l'équilibre de (C), **G** coïncide avec **O** origine du repère $(O, \vec{i})$.

Un dispositif approprié exerce sur (C) une force excitatrice $\vec{F} = F_m\sin(2\pi Nt + \varphi_F).\vec{i}$ portée par l'axe du ressort, d'amplitude F_m constante, de fréquence N réglable et de phase initiale φ_F constante.

Exercice n°10

En plus de la force excitatrice, le solide (C) est soumis à des forces de frottement visqueux équivalentes à une force $\vec{f} = -h.\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée de G et h est un coefficient positif.

L'équation différentielle régissant les oscillations de (C) s'écrit : $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + k_1x = F(t)$. La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = X_{m1}\sin(2\pi Nt + \varphi_{x1})$, où X_{m1} est l'amplitude du mouvement de (C) et φ_{x1} est sa phase initiale.

La vitesse instantanée du solide (C) a pour expression : $v(t) = V_m \sin(2\pi Nt + \varphi_v)$, où V_m est l'amplitude de la vitesse et φ_v est sa phase initiale.

1) Un dispositif approprié d'acquisition des données permet d'enregistrer l'évolution temporelle des valeurs algébriques F(t) et T(t) = - k.x(t) respectivement de la force excitatrice et de la tension du ressort.
   Pour une valeur N_{01} de la fréquence N, on obtient alors les courbes (I) et (II) de la **figure 5**.
   a- Justifier que la courbe (II) correspond à F(t).
   b- En exploitant les courbes de la **figure 5**, déterminer la fréquence N_{01}, l'amplitude F_m de la force excitatrice et le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_T$.
   c - Déduire que le système (S_1) est en état de résonance de vitesse à la fréquence N_{01}.

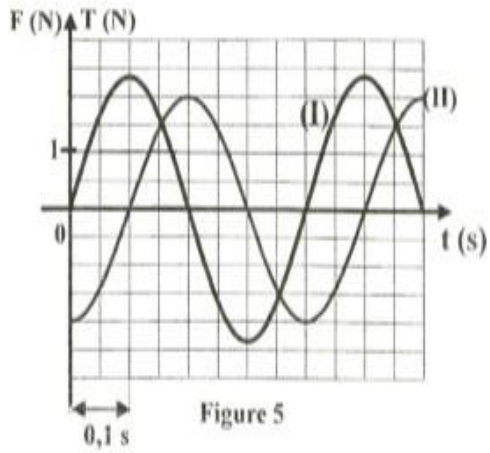


Figure 5

2) On donne: $X_{m1} = \frac{F_m}{\sqrt{4\pi^2h^2N^2 + (4\pi^2mN^2 - k_1)^2}}$ et $V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (2\pi mN - \frac{k_1}{2\pi N})^2}}$.

   La résonance d'élongation a eu lieu pour une fréquence N_{rx} telle que : $N_{rx}^2 = N_{01}^2 - \frac{h^2}{8\pi^2m^2}$ et la résonance de vitesse se produit pour une fréquence $N_{rv} = N_{01}$, où N_{01} est la fréquence propre du système (S_1). On fait varier la fréquence N de la force excitatrice et on mesure à chaque fois X_{m1} et V_m. On trace les courbes $X_{m1} = f(N)$ et $V_m = g(N)$. On obtient alors les courbes (a) et (b) représentées sur la **figure 6** de la feuille annexe (page 5/5).
   a- Identifier la courbe qui correspond à $X_{m1} = f(N)$ et celle qui correspond à $V_m = g(N)$.
   b- En exploitant les courbes (a) et (b) de la **figure 6** de la feuille annexe (page 5/5):
      b_1- relever la valeur de la fréquence N_{rx} ainsi que celle de la fréquence N_{rv} pour lesquelles se produisent les résonances respectivement d'élongation et de vitesse ;
      b_2- déterminer les valeurs de h et k_1 sachant que $F_m = 2$ N.

Exercice n°11

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse **m = 50 g** fixé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur **k** et dont l'autre extrémité est fixe (**figure 5**). Le solide (S) est assujetti à se déplacer suivant l'axe du ressort (R) qui est maintenu fixe et horizontal, tout en étant soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f}(t) = -h.\vec{v}(t)$, où **h** est une constante positive et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie **G** du solide (S). A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de (S) coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$, de vecteur unitaire $\vec{i}$ porté par l'axe **x'x**. Un excitateur transmet au système **{(R) + (S)}** une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m\sin(2\pi Nt).\vec{i}$; d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable. Le système **{(R) + (S)}** oscille en régime sinusoïdal forcé. La vitesse instantanée de G s'écrit : $v(t) = V_m \sin(2\pi Nt + \varphi_v)$, où V_m est l'amplitude et φ_v est la phase initiale.

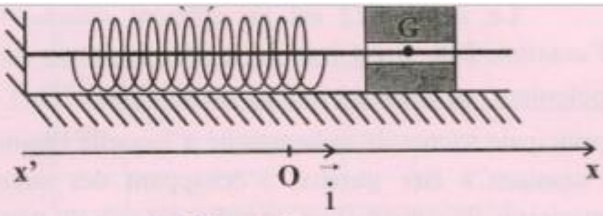


Figure 5

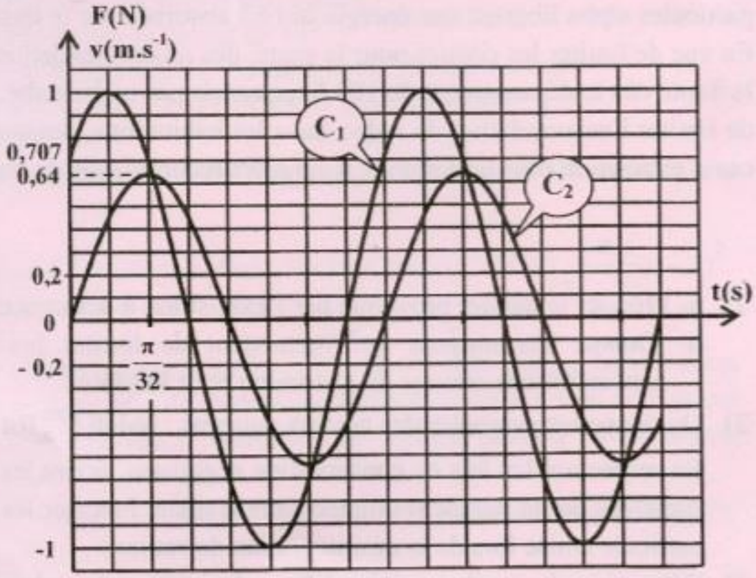


Figure 6

1) Un système approprié permet de suivre, simultanément, l'évolution au cours du temps de **v(t)** et de **F(t)**. Pour une valeur N_1 de N, on obtient les courbes (C_1) et (C_2) représentées sur la **figure 6**.

a- Justifier que la courbe (C_1) correspond à **v(t)**.

b- Déterminer graphiquement :

- la valeur de V_m et celle de F_m ;
- la valeur de la fréquence N_1 et la valeur de la phase initiale φ_v.

2) On rappelle que pour un circuit **RLC** série alimenté par une tension $u(t) = U_m\sin(2\pi Nt)$, d'amplitude U_m constante et de fréquence N réglable, l'intensité instantanée **i(t)** du courant électrique, circulant dans le circuit, s'écrit : $i(t) = I_m\sin(2\pi Nt + \varphi_i)$; avec I_m son amplitude et φ_i sa phase initiale.

a- En utilisant l'analogie formelle électrique-mécanique, compléter le **tableau 1** de la **page 5/5** **(à remplir par le candidat et à remettre avec sa copie)**.

b- Montrer que : $h = \dfrac{F_m}{V_m\sqrt{2}}$. Calculer sa valeur.

c- Déduire la valeur de **k**.

3) On fait varier la fréquence N de la force excitatrice. Pour une valeur N_2 de N, l'amplitude V_m de **v(t)** prend sa valeur la plus grande notée V_{m0}. Par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique :

a- montrer que le système **{(R) + (S)}** est le siège d'un phénomène physique particulier dont on précisera le nom ;

b- déterminer N_2, V_{m0} et la nouvelle valeur φ'_v de la phase initiale de v(t).