Série n°4 : Oscillations mécaniques amorties et non amorties

Exercice n°1

Un solide (C) de masse **m** et de centre d'inertie **G** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R), de masse négligeable, à spires non jointives et de raideur $k = 10\ N.m^{-1}$. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le système (S) = {ressort (R) ; solide (C)} peut osciller sur un plan horizontal.

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide (C) coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par un axe horizontal **x'x**. Au cours de son mouvement, **G** est repéré par son abscisse **x** dans le repère $(O, \vec{i})$ (voir **figure 3**).

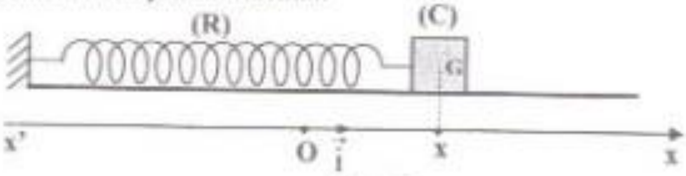


Figure 3

Les frottements sont supposés négligeables.

On écarte (C) de sa position d'équilibre jusqu'au point M_0 d'abscisse $x_0 < 0$. A l'instant $t = 0$, on l'abandonne avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, avec $v_0 > 0$. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} nulle.

1) a- Etablir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation **x** de **G** en fonction du temps.

b- En déduire que l'énergie mécanique **E** du système (S) se conserve au cours du temps.

2) La courbe ($\mathscr{E}$) de la **figure 4** représente l'évolution de l'une des deux formes d'énergie (cinétique ou potentielle élastique) du système (S) au cours du temps.

a- Justifier que cette courbe correspond à l'évolution de l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ du système (S).

b- On prendra $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$, montrer que l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ du système (S) s'écrit : $E_{pe}(t) = \frac{1}{4}kX_m^2\left[1-\cos\left[2(\omega_0 t + \varphi_x)\right]\right]$, où

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur (S),

X_m est l'amplitude du mouvement du centre d'inertie G de (C) et φ_x est sa phase initiale.

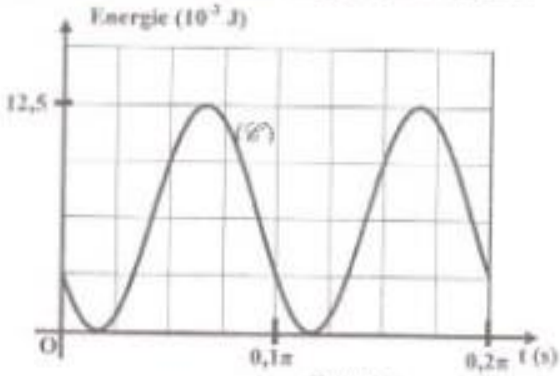


Figure 4

c- En exploitant la courbe ($\mathscr{E}$) de la **figure 4**, déterminer :

c_1- la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur (S) et en déduire la masse **m** du solide (C) ;

c_2- l'élongation x_0 et la vitesse v_0 du centre d'inertie G du solide (C) à l'instant initial $t = 0$;

c_3- la valeur de l'amplitude X_m du mouvement de G ainsi que celle de sa phase initiale φ_x.

Exercice n°2

Un pendule élastique est constitué d'un solide **(S)** de masse **m** pouvant coulisser, sans frottement, sur une tige horizontale **(T)**. Le solide **(S)** est attaché à un ressort, à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **k**. La position du centre d'inertie **G** de **(S)** est repérée par son abscisse **x(t)** sur un axe horizontal **x'Ox**. L'origine **O** des abscisses est confondue avec la position de **G** lorsque **(S)** est à l'équilibre.

Ecarté de sa position d'équilibre, puis abandonné à l'instant de date **t = 0s**, le solide **(S)** se met à osciller de part et d'autre du point **O**.

A un instant de date **t**, le système est représenté comme l'indique la **figure 1**.

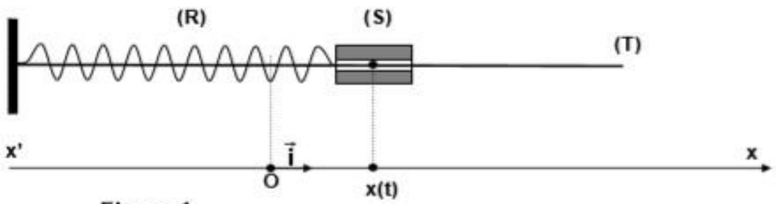


Figure 1

1) **a-** Représenter sur la **figure 1** de la **feuille annexe** (**page 5/5**) les forces extérieures exercées sur **(S)** à l'instant de date **t**.

b- Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'abscisse **x(t)** du centre d'inertie **G**. En déduire la nature de son mouvement.

2) A l'aide d'un dispositif approprié, on enregistre l'évolution de l'abscisse **x(t)** et celle de la vitesse **v(t)** de **G** . On obtient les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de la **figure 2**.

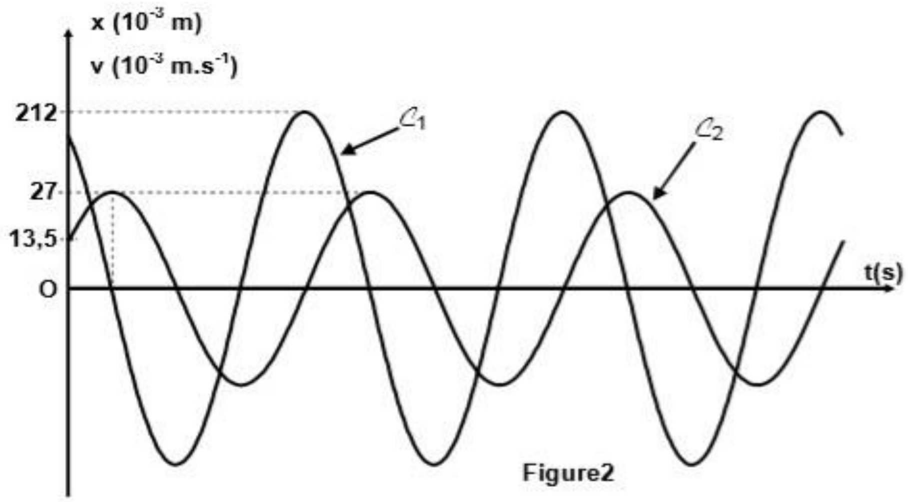


Figure2

a- Montrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à **v(t)**.
b- A partir des courbes, déterminer les amplitudes respectives X_{max} et V_{max} de **x(t)** et de **v(t)**. En déduire la valeur de la pulsation propre ω_0.
c- Déterminer la phase initiale φ_x de **x(t)**.

3) L'énergie totale **E** du système {ressort+solide} est constante, $E = 3{,}645.10^{-3}$ J.
a- Donner l'expression de **E** en fonction de **k** et X_{max}.
b- En déduire les valeurs de **k** et **m**.

Exercice n°3

Un pendule élastique est constitué d'un solide **(S)** de masse **m** et d'un ressort **(R)** de raideur $k = 40\ N.m^{-1}$ et de masse négligeable devant celle de **(S)**.

I. Le solide **(S)**, libre de se mouvoir sur un banc à coussin d'air horizontal, est écarté de sa position de repos dans la direction d'un axe $(O,\vec{i})$ parallèle au banc, puis libéré sans vitesse initiale à un instant t_o qui sera pris comme origine des temps ($t_o = 0$). Pour étudier les oscillations du pendule, on repère au cours du temps, la position du centre d'inertie **G** du solide **(S)** dans le repère $(O,\vec{i})$ **(Fig.3)**.

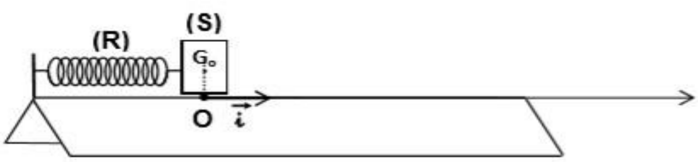


Fig.3

1. a) En désignant par **x** l'abscisse de **G** et par **v**, sa vitesse à un instant **t** donné, exprimer l'énergie mécanique **E** du pendule élastique en fonction de **m**, **k**, **v** et **x**.
b) En admettant que **E** reste constante au cours des oscillations, établir en **x**, l'équation différentielle des oscillations de **G**.

2. Un système approprié d'acquisition des données permet d'obtenir les courbes **1** et **2** de la figure **4**.

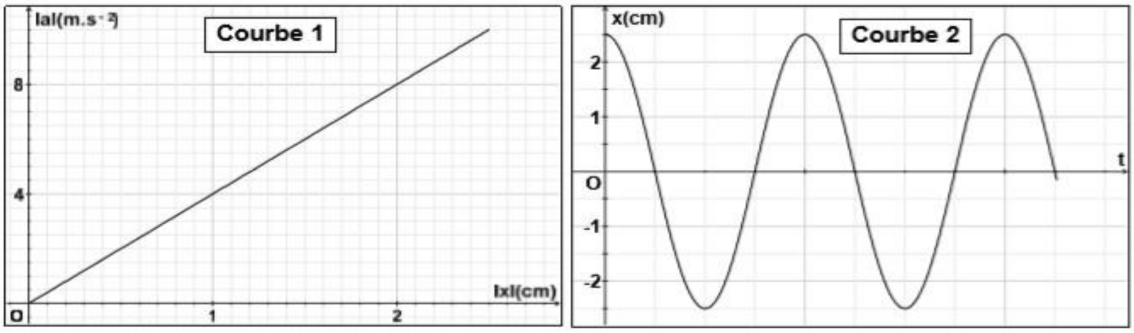


Fig.4

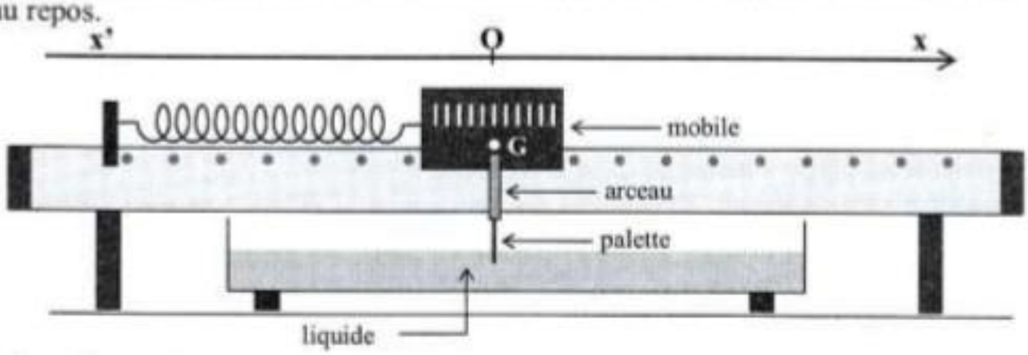
La courbe **1** traduit l'évolution de la valeur absolue de l'accélération **a** de **G** en fonction de la valeur absolue de son élongation **x** ; la courbe **2** représente l'évolution de **x** au cours du temps **t**.
a) Montrer que la forme droite de la courbe **1** vérifie l'équation différentielle établie dans **1.b.**
b) En déduire la valeur de :
– la pulsation des oscillations,
– la masse **m** du solide **(S)**.
c) Déterminer :
– les expressions de **x(t)** et de **v(t)**,
– le sens dans lequel le solide **(S)** a été écarté initialement.

Exercice n°4

Le dispositif de la **figure 4** comporte : un mobile de masse **m**, posé sur un banc à coussin d'air horizontal et attaché à un ressort de masse négligeable et de raideur **k**. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le mobile est équipé d'un arceau très léger, qui supporte une palette de masse négligeable plongeant dans une cuve contenant un liquide visqueux. Au cours de son mouvement, le mobile est soumis à des frottements de type visqueux dont la résultante est $\vec{f} = -h\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie **G** du mobile et **h** est le coefficient de frottement. La valeur de **h** est réglable.

Un dispositif approprié, non représenté sur la **figure 4**, permet d'enregistrer l'évolution au cours du temps, de l'élongation **x** du centre d'inertie **G** du mobile. Cette élongation est repérée sur un axe horizontal **x'x**. L'origine **O** de cet axe coïncide avec la position du centre d'inertie **G** lorsque le mobile est au repos.

figure 4



I- On retire la palette (**h = 0**) et on réalise un premier enregistrement. On obtient la courbe représentée dans la **figure 5**.

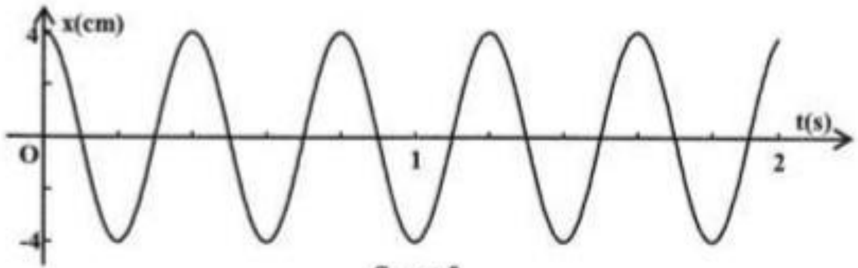


figure 5

1- **a-** Quelle est la nature des oscillations observées ?

b- Déterminer graphiquement la valeur de la période propre T_0 du système {mobile + ressort}.

2- Afin de déterminer la masse **m** du mobile, on fixe sur celui-ci une masse additionnelle **m' = 45 g**.

La période propre de l'ensemble {ressort+mobile+masse additionnelle} devient alors $T_0' = 0,5$ s

a- Exprimer T_0' en fonction de **m**, **m'** et **k**.

b- Montrer que la masse du mobile est donnée par : $m = \dfrac{m'}{\left(\dfrac{T_0'^2}{T_0^2} - 1\right)}$. Calculer la valeur de **m**.

3- Déterminer la valeur de la constante de raideur **k** du ressort.

II- On remet la palette en place puis on réalise, dans les mêmes conditions que précédemment, trois autres enregistrements, en modifiant à chaque fois la valeur du coefficient de frottement **h**. On obtient les courbes (**a**), (**b**) et (**c**) de la **figure 6** de la **feuille annexe**.

Compléter le tableau donné dans la **feuille annexe, à rendre avec la copie**, en associant chaque courbe à la valeur de **h** qui lui correspond. Indiquer, pour chaque enregistrement, le nom du régime correspondant (pseudo-périodique ou apériodique).

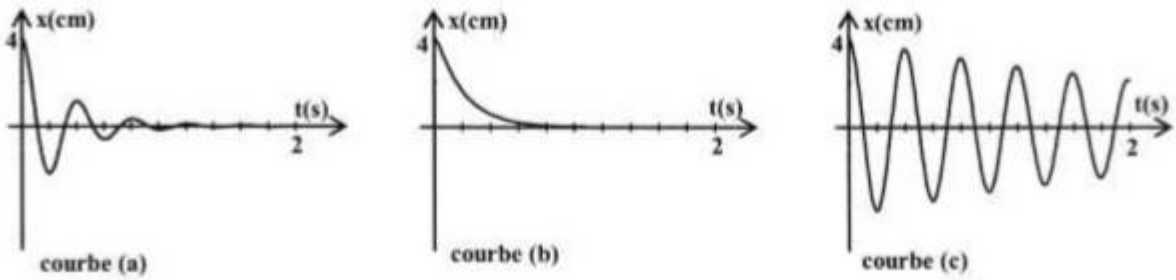
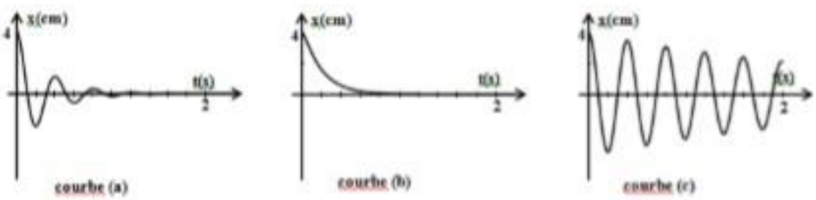


figure 6

	Courbe représentant x(t)	Nom du régime
$h = 0,05\ N.s.m^{-1}$		
$h = 0,40\ N.s.m^{-1}$		
$h = 4\ N.s.m^{-1}$		

Correction

Q	Corrigé
I-1-a	Libres non amorties.
I-1-b	$T_0 = 0,4$ s.
I-2-a	$T_0' = 2\pi.\sqrt{\frac{m+m'}{k}}$
I-2-b	$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{2\pi.\sqrt{\frac{m+m'}{k}}}{2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \left(\frac{T_0'}{T_0}\right)^2 = \frac{m+m'}{m}$ d'où $m = \frac{m'}{\frac{T_0'^2}{T_0^2}-1}$ AN: $m = 80$ g.
I-3	$k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$ AN: $k = 19,7\ N.m^{-1}$
II-	

	Courbe représentant x(t)	Nom du régime
$h = 0,05\ N.s.m^{-1}$	Courbe (c)	Pseudo-périodique
$h = 0,4\ N.s.m^{-1}$	Courbe (a)	Pseudo-périodique
$h = 4\ N.s.m^{-1}$	Courbe (b)	apériodique

Exercice n°5

Le pendule élastique de **la figure 2** est constitué d'un solide (S) de masse **m = 198 g** et de centre d'inertie **G**, attaché à l'une des extrémités d'un ressort **(R)** à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur **k = 20 N.m^{-1}**. L'autre extrémité du ressort est fixée à un support immobile.

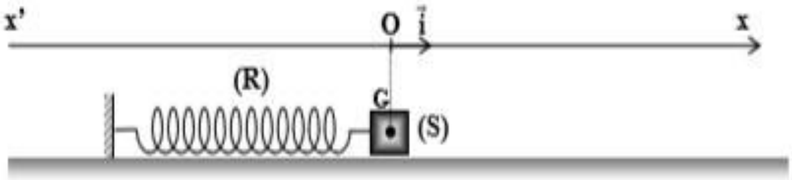


figure 2

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de (S) coïncide avec l'origine **O** du repère **$(O, \vec{i})$** de l'axe **x'x**.

On désigne par **x(t)** l'abscisse de **G** à un instant de date **t**, dans le repère **$(O, \vec{i})$** et par **v(t)** la valeur de sa vitesse à cet instant.

On utilise ce pendule, pour réaliser les deux expériences suivantes:

***Expérience 1*:** On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance **a**, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant de date **t = 0**. Le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point **O**. A un instant de date **t**, le système {(S) + (R)} est représenté sur la **figure 3 de l'annexe (page 5/5)**. Les frottements sont supposées négligeables.

1- a- Représenter sur la **figure 3 de l'annexe**, les forces extérieures exercées sur (S).

b- En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que l'équation différentielle du mouvement de **G** peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\, x(t) = 0$; où β est une constante que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.

c- Sachant que l'équation différentielle précédente admet une solution de la forme $x(t) = a \sin(2\pi N_0 t + \varphi_x)$, montrer que la fréquence propre N_0 des oscillations de **G** s'exprime par : $N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Calculer sa valeur.

2- a- Donner l'expression de l'énergie mécanique **E** du système {(S) + (R)} en fonction de **m**, **k**, **x** et **v**.

b- Montrer que le système {(S) + (R)} est conservatif.

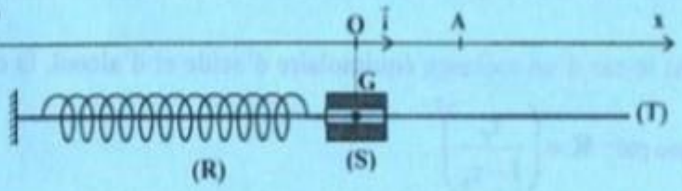
c- Sachant que **E = 0,025 J**, déterminer la valeur de **a**.

3- En exploitant les conditions initiales, déterminer la valeur de la phase initiale φ_x de **x(t)**.

Exercice n°6

Un solide (S) de masse **m** et de centre d'inertie **G** peut coulisser sans frottements sur une tige horizontale (T). Le solide (S) est accroché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **k**. L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe comme l'indique la **figure 2**.

figure 2



À l'équilibre, le centre d'inertie G de (S) coïncide avec l'origine O du repère $(O, \vec{i})$ porté par l'axe x'x.

On désigne par x(t) l'élongation de G à un instant de date t dans le repère $(O, \vec{i})$ et par v(t) sa vitesse à cet instant.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre jusqu'au point A d'abscisse $x_A = 2\sqrt{2}$ cm puis on l'abandonne, à l'instant t = 0, avec une vitesse $v_0 > 0$. Le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point **O**. L'équation différentielle régissant les oscillations de G est : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$.

1- Sachant que $x(t) = X_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_x\right)$ est une solution de cette équation différentielle, déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations de G en fonction de k et m.

2- a- Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système $\{(S) + (R)\}$ en fonction de k, x, m et v.

b- Montrer que le système $\{(S) + (R)\}$ est conservatif.

3- La courbe traduisant l'évolution au cours du temps de l'énergie potentielle Ep(t) du système $\{(S) + (R)\}$ est donnée par la **figure 3**.

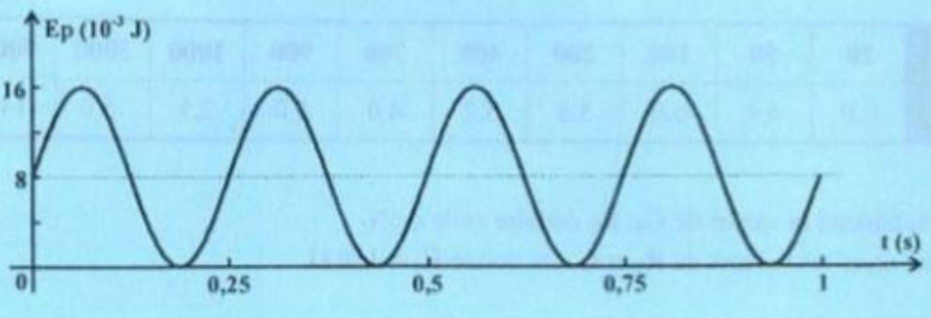


figure 3

On rappelle que Ep(t) est périodique de période $T = \frac{T_0}{2}$.

a- En exploitant la courbe de la **figure 3**, déterminer la valeur de:
- la raideur k du ressort ;
- la période propre T_0. En déduire celle de la masse m du solide (S) ;
- l'amplitude X_{max} des oscillations de G ;
- la vitesse initiale v_0.

b- Déterminer la phase initiale φ_x du mouvement de G.

Exercice n°7

Un solide (S) de masse **m** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **k**. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le système {(R) + (S)} peut osciller horizontalement le long d'une tige (T). A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par l'axe horizontal x'x (**figure 4**). Dans ce repère, la position de G à un instant t donné, est repérée par son abscisse **x(t)**. Les frottements sont supposés négligeables.

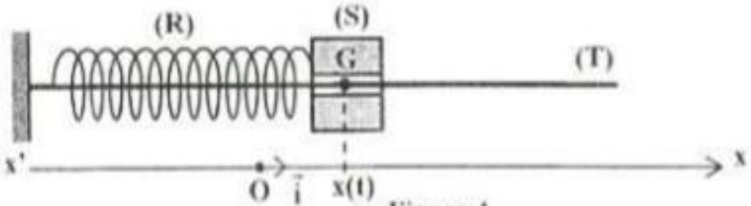


Figure 4

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance x_0 et on le lance, à l'instant $t = 0$, avec une vitesse v_0 en lui communiquant une énergie cinétique $E_{c0} = 18{,}75.10^{-3}$ J. Un système approprié permet d'enregistrer les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de la **figure 5** traduisant l'évolution au cours du temps de l'élongation **x(t)** et de la vitesse instantanée **v(t)** du centre d'inertie G de (S).

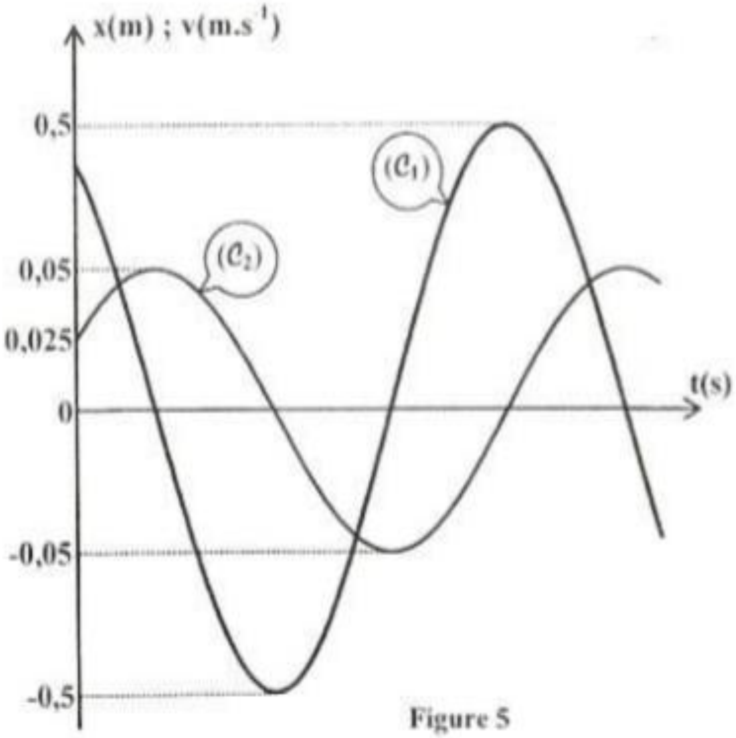


Figure 5

On suppose que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle au niveau du plan horizontal contenant la tige (T).

1) Montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution de **x** en fonction du temps s'écrit :

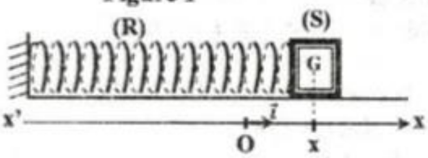
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$; où ω_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.

2) Justifier que la courbe $(\mathcal{C}_2)$ correspond à **x(t)**.
3) En exploitant les courbes de la **figure 5**, déterminer :
   a- la valeur de x_0 ;
   b- les valeurs de X_m et V_m, amplitudes respectives de x(t) et v(t). En déduire la valeur de ω_0 ;
   c- la phase initiale φ_x de x(t).
4) a- Déterminer la valeur de la vitesse v_0. Déduire la valeur de **m**.
   b- Déduire la valeur de **k**.
5) Déterminer la valeur de l'énergie mécanique **E** du système {(R) + (S)}.

Exercice n°8

Le pendule élastique de la **figure 1** est constitué d'un ressort (**R**) à spires non jointives, de masse supposée négligeable et de raideur **k**, lié à un solide (**S**) de masse **m** qui peut se déplacer sur un plan horizontal ; où l'énergie potentielle de pesanteur est supposée nulle. A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de (**S**) coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O,\vec{i})$ porté par un axe horizontal **x'x**. Dans ce repère, la position, de (**S**) à un instant **t** donné, est repérée par son abscisse **x(t)** et sa vitesse instantanée est **v(t)**.

Figure 1



A / Expérience 1

On écarte le solide (**S**) de sa position d'équilibre d'une distance **d** et on le lâche sans vitesse initiale, il se met à osciller. A l'aide d'un dispositif d'enregistrement approprié, on obtient la courbe de la **figure 2 de la page 5/5** représentant les variations de l'élongation **x(t)**.

1- Montrer que lors de son mouvement, le solide (**S**) est soumis à des forces de frottement.

2- On assimile la pseudopériode **T** à la période propre T_0 des oscillations. Déterminer la fréquence propre N_0 des oscillations.

3- a- Exprimer l'énergie mécanique **E** du système {(**R**) + (**S**)} en fonction de **m**, **k**, **x** et **v**.

b- Soient E_0 et E_1 les valeurs des énergies mécaniques du système {(**R**) + (**S**)}, respectivement aux instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 2T_0$. On note X_{m0} et X_{m1}, les amplitudes respectives des oscillations à ces deux instants.

Montrer que : $\dfrac{E_1}{E_0} = \dfrac{X_{m1}^2}{X_{m0}^2}$.

Exercice n°9

Un pendule élastique est constitué d'un solide (**S**) de centre d'inertie **G** et de masse **m**, attaché à l'une des extrémités d'un ressort (**R**) à spires non jointives, d'axe horizontal, de raideur **k** et de masse négligeable devant **m**. L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe.

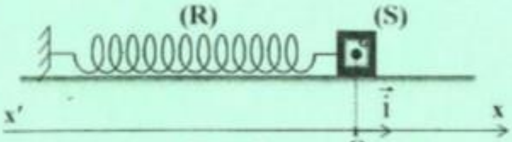


Figure 2

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide (**S**) est confondu avec l'origine **O** d'un repère $(O,\vec{i})$ porté par un axe horizontal **x'x**, comme l'indique la figure **2**. Au cours de son mouvement, **G** est repéré par son élongation **x(t)** dans le repère $(O,\vec{i})$; sa vitesse instantanée est notée **v(t)**.

L'amortissement du mouvement ainsi que les forces de frottement sont supposés négligeables.

1) On écarte le solide (**S**) de sa position d'équilibre jusqu'au point M_0 d'abscisse $x_0 < 0$, puis on le lâche, à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale v_0.

a- En utilisant la méthode dynamique, montrer que les oscillations de **G** sont régies par l'équation différentielle: $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$; où ω_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.

b- Exprimer l'énergie mécanique **E** du système {(**S**) + (**R**)} en fonction de **k**, **m**, **x(t)** et **v(t)**.

c- Déduire que le système {(**S**) + (**R**)} est conservatif.

2) Un dispositif approprié d'acquisition de données permet d'enregistrer simultanément l'évolution de la vitesse **v(t)** de **G** ainsi que celle de l'énergie cinétique $E_c(t)$ du solide (**S**) en fonction du temps et de tracer les courbes (**I**) et (**II**) de la figure **3**.

En exploitant les courbes de la figure **3** :

a- justifier que la courbe (**I**) correspond à $E_c(t)$;

b- montrer que $\omega_0 = 20\ rad.s^{-1}$ et déduire l'amplitude du mouvement oscillatoire de **G** ;

c- déterminer **k** et montrer que **m = 100 g** ;

d- chercher x_0 et déduire que $v_0 = -0,8\ m.s^{-1}$;

e- déterminer la phase initiale de la vitesse **v(t)** et en déduire celle de l'élongation **x(t)**.

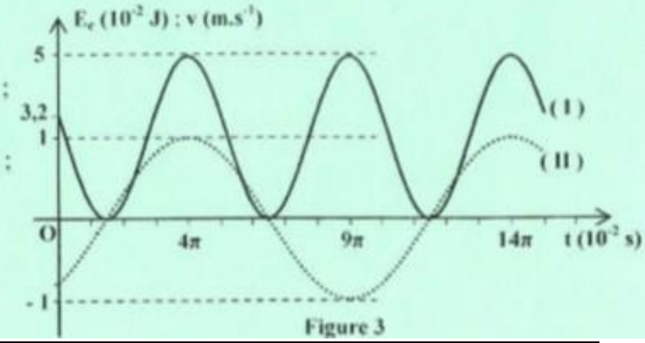


Figure 3

Exercice n°10

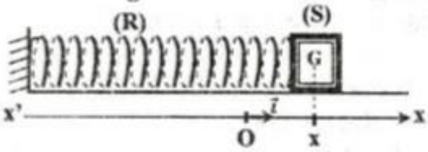


Figure 1

Le pendule élastique de la **figure 1** est constitué d'un ressort **(R)** à spires non jointives, de masse supposée négligeable et de raideur **k**, lié à un solide **(S)** de masse **m** qui peut se déplacer sur un plan horizontal ; où l'énergie potentielle de pesanteur est supposée nulle. A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de **(S)** coïncide avec l'origine **O** d'un repère **$(O,\vec{i})$** porté par un axe horizontal **x'x**. Dans ce repère, la position, de **(S)** à un instant **t** donné, est repérée par son abscisse **x(t)** et sa vitesse instantanée est **v(t)**.

A / Expérience 1

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance **d** et on le lâche sans vitesse initiale, il se met à osciller. A l'aide d'un dispositif d'enregistrement approprié, on obtient la courbe de la **figure 2 de la page 5/5** représentant les variations de l'élongation **x(t)**.

1- Montrer que lors de son mouvement, le solide **(S)** est soumis à des forces de frottement.

2- On assimile la pseudopériode **T** à la période propre **T_0** des oscillations. Déterminer la fréquence propre **N_0** des oscillations.

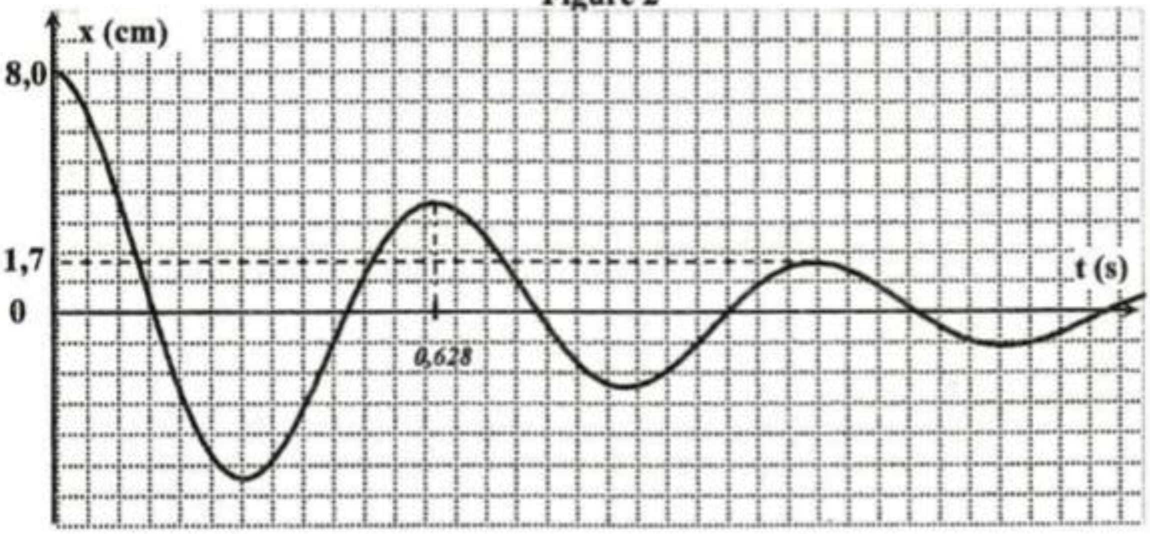
3- a- Exprimer l'énergie mécanique **E** du système {(R) + (S)} en fonction de **m, k, x** et **v**.

b- Soient E_0 et E_1 les valeurs des énergies mécaniques du système {(R) + (S)}, respectivement aux instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 2T_0$. On note X_{m0} et X_{m1}, les amplitudes respectives des oscillations à ces deux instants.

Montrer que : $\dfrac{E_1}{E_0} = \dfrac{X_{m1}^2}{X_{m0}^2}$.

c- Calculer $\dfrac{E_1}{E_0}$. En déduire que **E** ne se conserve pas.

Figure 2



Correction

Expérience 1

1- D'après la figure 2, l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps. En mouvement le solide (S) est soumis à des forces de frottement.

2- $T = T_0 = 0{,}628$ s ; $N_0 = \dfrac{1}{T_0} = 1{,}59$ Hz.

3- a- $E = E_c + E_{pe} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$

b- $t_0 = 0 \Rightarrow v = 0$ et $x = X_{m0}$ $\Rightarrow E_0 = \dfrac{kX_{m0}^2}{2}$; $t1 = 2T0$ $\Rightarrow v = 0$ et $x = X_{m1}$ $\Rightarrow E_1 = \dfrac{kX_{m1}^2}{2}$

c- $\dfrac{E_1}{E_0} = 0{,}045$; $\dfrac{E_1}{E_0} < 1 \Rightarrow E_1 < E_0 \Rightarrow$ E ne se conserve pas.

Exercice n°11

Le pendule élastique de la **figure 2** est constitué d'un solide **(S)** de masse **m**, relié à l'une des extrémités d'un ressort **(R)** à spires non jointives, d'axe horizontal, de raideur **k** et de masse négligeable devant **m**. L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe.

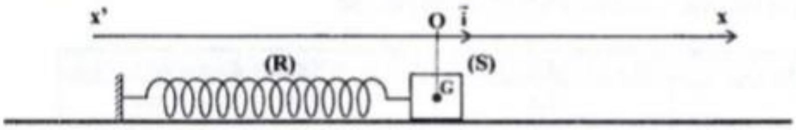


figure 2

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de (S) coïncide avec l'origine **O** du repère $(O, \vec{i})$ de l'axe x'x.
Ecarté de sa position d'équilibre puis abandonné à l'instant de date **t = 0**, le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point **O**. On désigne par **x(t)** et **v(t)** respectivement, l'élongation et la vitesse de **G** à un instant de date **t**.
Le mouvement du centre d'inertie **G** de (S) est étudié dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Les forces de frottements ainsi que l'amortissement du mouvement sont considérés comme négligeables.

1- a- Représenter sur la **figure 3 de la page 5/5**, les forces extérieures exercées sur (S).

b- En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que les oscillations de **G** sont régies par l'équation différentielle : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, x(t) = 0$; où ω_0 est une constante à exprimer en fonction de **k** et **m**.

c- Préciser le nom de ω_0.

d- Vérifier que $x(t) = X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de cette équation différentielle.

2- La courbe traduisant l'évolution de l'élongation **x** au cours du temps, est représentée sur la **figure 4**.

a- En exploitant la courbe de la **figure 4**:

a_1- déterminer la valeur de X_{max} ainsi que celle de ω_0 ;

a_2- montrer que : $\varphi_x = \frac{5\pi}{6}$ rad.

b- En déduire la valeur de l'amplitude V_{max} de la vitesse **v(t)** ainsi que celle de sa phase initiale φ_v.

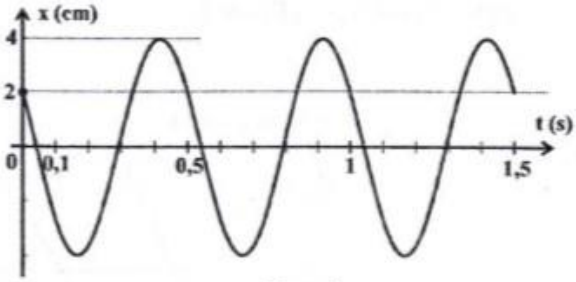


figure 4

3- Les courbes ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) de **la figure 5** traduisent l'évolution, au cours du temps, des énergies cinétique $Ec = \frac{1}{2}mv^2$ et potentielle $Ep = \frac{1}{2}kx^2$ du système $\{(S) + (R)\}$.

a- Identifier, parmi ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$), celle qui correspond à **Ep(t)**.

b- Vérifier que le système $\{(S) + (R)\}$ est conservatif.

c- Déterminer les valeurs de **k** et **m**.

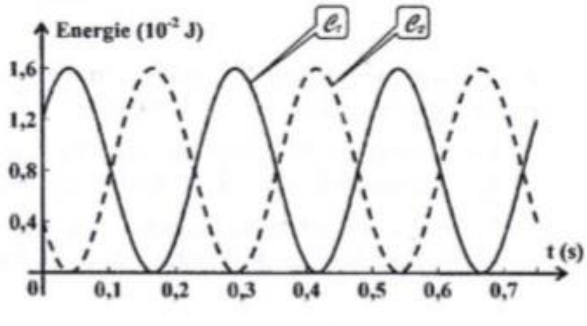
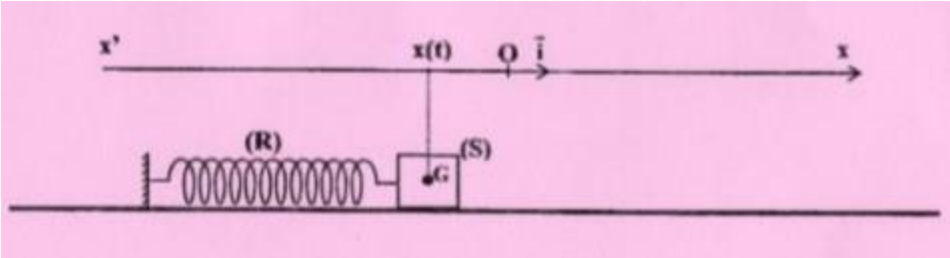
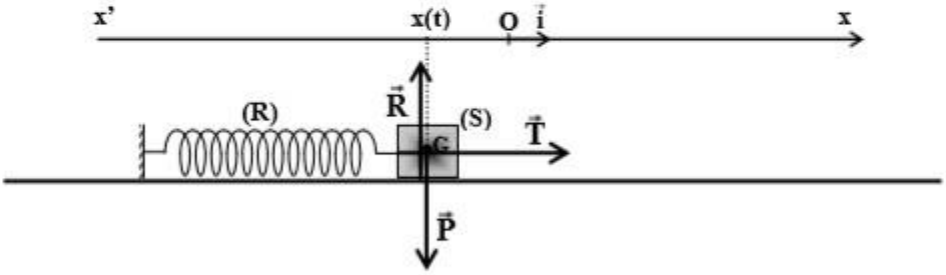


figure 5



Correction

a) Le solide (S) est soumis à une force à distance (le poids) et deux forces de contacte (la réaction du plan et tension du ressort). Le Tension du ressort est à chaque instant opposée à la déformation $\overrightarrow{\Delta l}$. Le ressort étant comprimé.



b) dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, la somme des forces extérieures exercées sur le solide est égale au produit de sa masse par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

Par projection de relation vectorielle précédente sur le repère $(o,\vec{\imath})$ on obtient la relation algébrique :

$$-Kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

D'où

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + Kx(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, x(t) = 0 \quad (E)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

c) ω_0 est la pulsation propre du pendule élastique.

d) $x(t) = X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

Cherchons l'expression de la dérivée seconde de *x(t) ;*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega_0 X_{max}\sin\left(\omega_0 t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \omega_0^2 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_x + \pi) = -\omega_0^2 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)$$

Remplaçons cette expression dans l'équation différentielle (E) ;

$$-\omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

La fonction $x(t) = X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$, vérifie l'équation différentielle (E) donc elle en est une solution générale ; les paramètres X_{max} *et* φ_x sont imposés par les conditions initiales du mouvement.

2)

a)

a₁. $X_{max} = 4\,cm = 4.10^{-2}\,m,\ T_0 = 0{,}5\,s$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

AN : $\omega_0 = 4\pi\,rad.s^{-1} = 12{,}56\,rad.s^{-1}$

a₂. $x(t) = X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega_0 X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_x) = \omega_0 X_{max}\sin\left(\omega_0 t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(t) = V_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_v)$$

D'après la courbe de la figure 4 l'élongation initiale du centre d'inertie du solide vaut 2 cm et sa vitesse initiale est négative.

$$\begin{cases} x(0) = X_{max}\sin(\varphi_x) = 2.10^{-2} \\ v(0) = \omega_0 X_{max}\cos(\varphi_x) < 0 \end{cases} ; \begin{cases} \sin(\varphi_x) = \frac{x(0)}{X_{max}} \\ \cos(\varphi_x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\varphi_x) = \frac{1}{2} \\ \cos(\varphi_x) < 0 \end{cases} \quad d'ou\ \ \varphi_x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}\ rad$$

b) $V_{max} = \omega_0 X_{max}$ et $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$

AN :

$$V_{max} = 0,5\ m.s^{-1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_v = \frac{4\pi}{3}\ rad$$

3)

a) L'énergie potentielle est nulle lorsque l'élongation x(t) est nulle, d'après les courbes des figures 4 et 5 on voit que la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par 0 aux mêmes instants où l'élongation x(t) s'annule, ce qui permet d'affirmer que la courbe $\mathscr{C}_2$ représente l'évolution de l'énergie potentielle Ep(t).

b) D'après les courbes d'évolution de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique on vérifie qu'à chaque instant l'énergie totale du système {(S), (R) } se conserve ; $E = Ep(t) + Ec(t) = \mathbf{1,6.10^{-2}J}$. donc le système est conservatif.

c) Lorsque le solide est au extrémités (x(t)= $\pm X_{max}$) toute l'énergie du système est potentielle.

$$Ec_{max} = \frac{1}{2}KX_{max}^2 = E$$

De même lors du passage par l'origine (x(t)= 0) toute l'énergie du système est cinétique.

$$Ec_{max} = \frac{1}{2}mV_{max}^2 = E$$

$$K = \frac{2E}{X_{max}^2} \quad et \quad m = \frac{2E}{V_{max}^2}$$

AN :

$$K = 20\ N.m^{-1} = \ et \quad m = 0,128\ kg.$$

Exercice n°12

Un solide (C) de masse **m** et de centre d'inertie **G** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort **(R)**, de masse négligeable, à spires non jointives et de raideur **k = 10 N.m⁻¹**. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le système **(S)** = {ressort **(R)** ; solide **(C)**} peut osciller sur un plan horizontal.

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide **(C)** coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par un axe horizontal **x'x**. Au cours de son mouvement, **G** est repéré par son abscisse **x** dans le repère $(O, \vec{i})$ (voir **figure 3**).
Les frottements sont supposés négligeables.

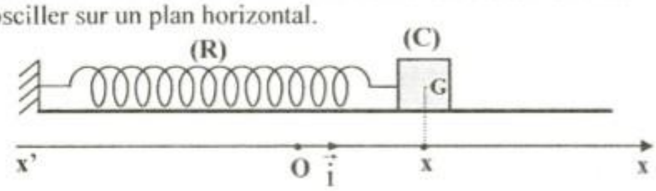


Figure 3

On écarte **(C)** de sa position d'équilibre jusqu'au point M_0 d'abscisse $x_0 < 0$. A l'instant **t = 0**, on l'abandonne avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, avec $v_0 > 0$. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} nulle.

1) a- Etablir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation **x** de **G** en fonction du temps.
   b- En déduire que l'énergie mécanique **E** du système **(S)** se conserve au cours du temps.

2) La courbe ($\mathscr{C}$) de la **figure 4** représente l'évolution de l'une des deux formes d'énergie (cinétique ou potentielle élastique) du système (S) au cours du temps.
   a- Justifier que cette courbe correspond à l'évolution de l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ du système (S).
   b- On prendra $x(t) = X_m\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$, montrer que l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ du système (S) s'écrit : $E_{pe}(t) = \frac{1}{4}kX_m^2\left[1 - \cos\left[2(\omega_0 t + \varphi_x)\right]\right]$, où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur (S), X_m est l'amplitude du mouvement du centre d'inertie G de (C) et φ_x est sa phase initiale.

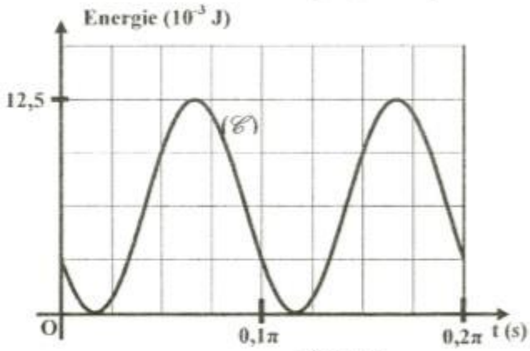


Figure 4

   c- En exploitant la courbe ($\mathscr{C}$) de la **figure 4**, déterminer :
      c₁- la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur (S) et en déduire la masse **m** du solide (C) ;
      c₂- l'élongation x_0 et la vitesse v_0 du centre d'inertie G du solide (C) à l'instant initial t = 0 ;
      c₃- la valeur de l'amplitude X_m du mouvement de G ainsi que celle de sa phase initiale φ_x .

Exercice n°13

Le pendule élastique de la **figure 1** est constitué d'un ressort **(R)** à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **k**, lié à un solide **(S)** de masse **m** qui peut se déplacer le long d'une tige **(T)**. A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de **(S)** coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$ porté par un axe horizontal **x'x**. A un instant **t** donné, la position de **G** est repérée par son abscisse **x(t)**.

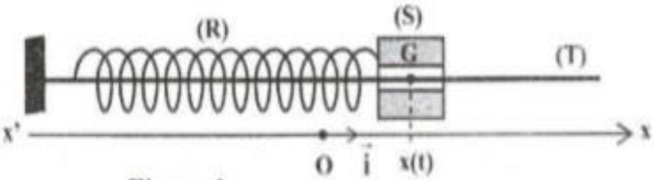


Figure 1

L'énergie potentielle de pesanteur est supposée nulle au niveau du plan horizontal contenant la tige **(T)**.

A) Expérience 1

On écarte le solide **(S)** de sa position d'équilibre d'une distance x_0 et on le lâche, à l'instant **t = 0**, sans vitesse initiale, il se met donc à osciller. Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis à des frottements de type visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$; où **h** est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie **G** de **(S)**. L'équation différentielle régissant les oscillations de **G** est donnée par :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0.$$

Pour trois valeurs de **h** (h_1, h_2, h_3) telles que $h_1 < h_2 < h_3$, un dispositif approprié permet d'enregistrer l'évolution, au cours du temps, de l'élongation **x** du centre d'inertie **G** de **(S)**. On obtient alors les courbes (A), (B) et (C) de la **figure 2**.

1) a- Associer à chacune des courbes (A), (B) et (C) de la **figure 2** le coefficient de frottement correspondant.

b- Parmi les trois courbes (A), (B) et (C) de la **figure 2**, indiquer celle (ou celles) qui correspond(ent) à :

- un régime pseudopériodique ;
- un régime apériodique.

2) On se place dans le cas du régime pseudopériodique. A l'instant **t = 0**, le système {**(S)** + **(R)**} acquiert une énergie mécanique $W = 18{,}75.10^{-3}$ **J**. On assimile la pseudo-période **T** à la période propre T_0 des oscillations.

a- Déterminer graphiquement les valeurs de x_0 et **T**.

b- En déduire les valeurs de **k** et **m**.

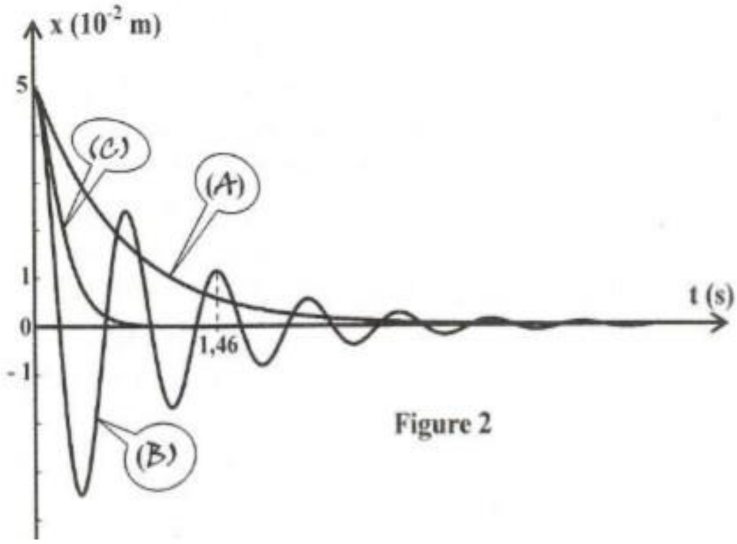


Figure 2