Lycée Sec. Ibn Charaf Novembre 2019	Devoir de contrôle n°1 MATHÉMATIQUES	Niveau : 4ème Sc. Exp Durée : 2h | Prof/ Maayoufi

N.B : L'épreuve comporte deux pages. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Le barème est approximatif.

Exercice 1 (3,5 pts)

I- Indiquer la réponse exacte :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\sin\left(\frac{1}{x}\right))$ est égale à :

a/ 0 **b/** 1 **c/** $+\infty$

2) Soit la suite (U) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(U_n)$ est égale à :

a/ 1 **b/** 0 **c/** $+\infty$

3) $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ est une racine cubique de :

a/ i **b/** $-i$ **c/** -1

4) Si z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $-iz^2 + (1+i)z + (1-i) = 0$.
Alors $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv ...$:

a/ $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ **b/** $\frac{\pi}{4}[2\pi]$ **c/** $-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

II- Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant** la réponse **:**

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\frac{1}{2+x^2} \le f(x) \le \frac{1}{1+x}$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 1$.

2) L'équation : $\cos x = x$ admet une unique solution α telle que : $\alpha \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Si a est une solution de l'équation $(E) : z^n = 1$, alors $\overline{a}$ est une solution de (E).

Exercice 2 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-\cos(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x + \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}}, & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

1) **a-** Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $0 \le f(x) - 1 \le \frac{2}{x^2}$.

b- En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) **a-** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$.

b- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{3}{2}$.

c- f est–elle continue en 0. Conclure.

3) **a-** Justifier la continuité de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b- Montrer que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c- Déterminer $f([0\ ;\ 2])$. En déduire que l'équation : $2f(x)-7=0$ admet une unique solution $\beta\in[0\ ;\ 2]$.

Exercice 3 (4,5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=1+i$; $z_B=\sqrt{3}+i$; $z_C=1-i\sqrt{3}$ *et* $z_D=(\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})$.

1) **a/** Écrire la forme exponentielle de z_A; z_B *et* z_C.

b/ Placer les points A, B et C dans le repère considéré.

c/Montrer que OBC est un triangle rectangle est isocèle.

2) **a/** Vérifier que le point C est un point de cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 2.

b/ Montrer que la droite (CD) est tangente à ($\mathscr{C}$) en C.

3) On donne le nombre complexe : $z=z_A^3\, z_B$.

a/ Donner la forme algébrique de z_A^3; puis en déduire la forme algébrique de z.

b/ Donner la forme trigonométrique de z.

c/ Déterminer alors les valeurs exactes de: $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 (3,75 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-3iz-2=0$.

2) **a-** Soit $f(z)=z^3-5iz^2-8z+4i$; Montrer que $z_0=2i$ est une solution de $f(z)$.

b- Trouver le polynôme $g(z)=\alpha z^2+\beta z+\lambda$ tel que $f(z)=(z-2i)g(z)$.

c- Résoudre alors l'équation $f(z)=0$.

3) Soit θ un réel de $]0\ ;\ 2\pi[$ et soit l'équation : $(E_\theta) : z^2+i(e^{i\theta}-2)z+e^{i\theta}-1=0$.

a- Trouver une racine carrée du nombre complexe $-e^{i2\theta}$.

b- Résoudre alors l'équation (E_θ).

Exercice 4 (3,25 pts)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=\dfrac{n+1}{4^n}$, $n\geq 0$.

1) **a-** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Calculer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

c- Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.

Montrer que (S_n) est une suite croissante et déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n\leq 2$.