LYCEE .H.T.BIZERTE	Prof : M^R DHAOUADI -Ali
DEVOIR DE Contrôle: N°(1) Le 05/11/2018	4Math$_2$ 2h

Exercice (1) : (7.5pts)

Soit dans C l'équation :

$(E): z^2-(a-i\overline{a})z-i|a|^2=0$ *où* a *est un nombre complexe tel que* $a=re^{i\theta}$, $r\succ 0$ *et* $\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$.

A- *1) a/ Résoudre dans C l'équation* (E) *dans le cas où* $a=1+i$.

b/ On suppose dans cette question que $\overline{a}=ia$*, montrer que l'équation* (E) *est équivalente à* $z^2-(2a)z+a^2=0$. *En déduire que* (E) *admet une unique solution que l'on déterminera.*

c/ Montrer que le nombre complexe $z_0=a+i$ *n'est pas une solution de* (E)

On suppose dans la suite de l'exercice que $\overline{a}\neq ia$

2) a/ Montrer que le discriminant de l'équation (E) *est* $\Delta=(a+i\overline{a})^2$

b/ Résoudre dans C l'équation (E) *en donnant les solution sous la forme exponentielle*

3) Soit dans C l'équation $(E'): z^3+i\overline{a}.z^2-a^2z-ia|a|^2=0$

a/ Montrer que $(-a)$ *est une solution de* (E').

b/ Montrer que l'équation (E') *est équivalente à* $(z+a)\left(z^2-(a-i\overline{a})z-i|a|^2\right)=0$

c/ Résoudre dans C l'équation (E')

B- *On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $\mathscr{R}(o,\vec{u},\vec{v})$ *les points* $A(a)$, $B(-i\overline{a})$ *et* $C(a-i\overline{a})$.

1) a/ Montrer que $OA=OB$ *et que* $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})\equiv 2\theta+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b/ Déterminer les valeurs de θ *pour les quelles les points O,A et B sont alignés.*

2) On suppose que les points O,A et B ne sont pas alignés.

a/ Montrer que le quadrilatère $OACB$ *est un losange et que son aire est* $S=\left|a^2\cos(2\theta)\right|$

b/ Déterminer les valeurs de θ *pour les quelles que le quadrilatère* $OACB$ *est un carrée.*

c/ Construire le quadrilatère $OACB$ *dans le cas où* $a=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice (2) : (6 pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x}+2x\text{.....}si.x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{\pi}{x})}{x-1}\text{.....}si..x\succ 0\end{cases}$

1) a/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

b/ Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[/\{1\}$ *on a :* $|f(x)|\leq\frac{\sqrt{x}}{|x-1|}$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

c/ Montrer que f est continue en 0.

d/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}).f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. *En déduire la nature de la branche infinie à* C_f *au voisinage de* $-\infty$

2) Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[/\{1\}$ *on pose* $u(x)=\pi(\frac{x-1}{x})$ et $v(x)=\frac{\sin x}{x}$

a/ Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[/ \{1\}$ *on a :* $f(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{x}} \times vou(x)$

b/ En déduire que f *est prolongeable par continuité en 1*

3) Calculer $\lim_{x\to 2} f\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} f(x)\right]$, $\lim_{x\to+\infty} fof(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{fof(x)}{f(x)}$.

4) On désigne par g le prolongement par continuité de f *en 1.En utilisant la fonction g ,montrer que l'équation :* $\sin(\dfrac{\pi}{x}) = 3(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}})$ *admet au moins une solution* $\alpha \in]1,2[$

<u>Exercice (3)</u> : (6.5 pts)

On considère la suite (u_n) *définie sur IN par :* $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n ..;.n \in IN \end{cases}$

1) a/ Calculer u_2 *et* u_3

b/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$ *on a* $u_n \geq n$ *.En déduire* $\lim_{n\to+\infty} u_n$

c/ Montrer que pour tout $n \in IN$ *on a* $u_{n+1} \geq u_n$

d/ Montrer que pour tout $n \in IN$ *:* $u_n u_{n+2} = (-1)^n + (u_{n+1})^2$

2) Soit les suites (α_n) *et* (β_n) *définies sur* IN^* *par* $\alpha_n = \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ *et* $\beta_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$

a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$ *:* $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+1}}$

b/ En déduire que pour tout $n \in IN^*$ *:* $\alpha_n \prec \beta_n$ *et* $0 \prec \beta_n - \alpha_n \leq \dfrac{1}{4n^2}$

3) a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$ *:* $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{u_{2n}u_{2n+2}}$ *(utiliser 1) d)*

b /Montrer que pour tout $n \in IN^*$ *:* $\alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n} - 1$

c/ En déduire la variation de chacune des suites (α_n) *et* (β_n)

d/ Montrer que les suites (α_n) *et* (β_n) *sont adjacentes et calculer leur limite commune.*

Bon Travail