Exercice N°1 !

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1/a) Mettre sous forme algébrique $(3-i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+(1+i)z-2(1-i)=0$

2/ Soit θ un réel de $[0,\pi]$. On considère l'équation : $(E_\theta): z^2+(1+e^{i\theta})z-2(1-e^{i\theta})=0$

a) Vérifier que (-2) est une racine de (E_θ).

b) Déterminer l'autre solution de (E_θ).

3/ Soit A et M les points d'affixes respectives -2 et $1-e^{i\theta}$; $\theta\in[0,\pi]$

a) Calculer AM en fonction de θ

b) Déterminer la valeur de θ de $[0,\pi]$ pour laquelle AM est maximale

Exercice 2 !

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1)a)Verifier que pour tout $x>0$ on a :   ,En déduire que f est continue a droite en 0

b) Montrer que f est dérivables a droite en 0.

c)Déterminer une équation cartésienne de la demi tangente a la courbe de f au point d'abscisse 0

2)a)Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

Exercice 3 !

Soit $f(x)=\sqrt{1+\cos(\pi x)}$, $x\in[0,1]$

1) Justifier que f estdérivable sur $[0,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{-\pi\sin(\pi x)}{2f(x)}$

2)a) Montrer que pour tout $x\in[0,\frac{1}{2}]$,on a $|f'(x)|\le\frac{\pi}{2}$

b) En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{1}{2}]$ on a , $|f(x)-1|\leq\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-x)$

Exercice N°4 !

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

1/ On considère l'équation (E) **:** $z^2-(2+i)z+2i=0$.

a) Sans calculer les solutions z' et z'' de l'équation (E) .

- vérifier que : $\arg(z')+\arg(z'')=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$.
- On donne A et B les points d'affixe z' et z'' ; Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AB]

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2/ Soit $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

On considère l'équation (E_θ) : $z^2-(\sin\theta+2+i)z+2\sin\theta+2i=0$.

a) Montrer que l'équation E_θ admet une solution réelle z_1 que l'on calculera.

b) Déterminer l'autre solution z_2

3)Soit A et M les points d'affixes respectifs 2 et $\sin(\theta)+i$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$

c) Pour quelle valeur de θ la distance entre A et M est maximal.

Exercice N°5 !

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-1 & \text{si } x\geq0\\ \frac{x-\sin(x)}{1+x^2} & \text{si } x<0\end{cases}$

1/ Montrer que f est continue en 0

2/a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b) Vérifier que pour tout $x<0$ on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1+x^2}$ puis étudier la dérivabilité de f à gauche en 0

3/a) Montrer que pour tout $x<0$: $\frac{x-1}{1+x^2}\leq f(x)\leq\frac{x+1}{1+x^2}$

b) Montrer que ζ_f admet une asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$

c) Montrer que $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$

4/ Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $0 \le g'(x) \le 1$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le \sqrt{n+1} - 1 \le \sqrt{n}$

Exercice n°6 !

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}} + 2.$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1)Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)^2}$

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3)a)Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à C au point I(0 ;2)

b) Etudier la position de C par rapport à (T) .

c) Tracer C et (T)

4)a)Montrer que pour tout $x \in [\sqrt{2}; +\infty[$ on a: $0 < f'(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Soit la fonction g définie sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$

*) Montrer que g est strictement décroissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$

**) Déduire alors que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[\sqrt{2}; +\infty[$ une unique solution α

5)Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a , $u_n \ge 2$

b) Montrer en utilisant les inégalités des accroissements finie que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$ puis déduire que $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |2 - \alpha|$.

c)Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 !

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par:

$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}$, $V_0 = 7$ et $V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$

1) On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n - U_n$.

Montrer que la suite (W_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

2)Montrer que pour tout $n \in IN : V_n \geq U_n$.

3) Montrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

5) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

6) On considère à présent la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n = 3\,U_n + 4\,V_n$.

a) Démontrer que la suite (T_n) est constante et donner sa valeur.

b) En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 8 !

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)= \frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]-1, 1[.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

c) Calculer f (1) puis calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

d) Montrer que l'équation : $f^{-1}(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans]-1, 1[et déterminer sa valeur.

e) Donner une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point A d'abscisse x_0

3) Soit la fonction h définie sur]-1, 1[par $h(x) = f^{-1}\left(Sin(\frac{\pi}{2}x)\right)$

Montrer que h réalise une bijection de] -1,1[dans IR.

Exercice N9 !

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } \quad x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1)a)Montrer que pour tout $x > 0$ $on\ a : |f(x)| \leq x^3$

b) En déduire la limite de f à droite en 0

c)Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement

2) a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pi$

3)Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 1[$ par $g(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}\right)$

a)Montrer que g est continue sur $]-\infty; 1[$

b) Calculer la limite de g à gauche en 1 et la limite de g en $(-\infty)$

Exercice N°10 !

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par: $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/a) Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que: $f'(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que I(0 , - 1) est un point d'inflexion de ζ_f

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à ζ_f au point I

3/ Tracer ζ_f en précisant les asymptotes

4/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J à préciser

b) Calculer $(f^{-1})'(-1)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$