# Résumé Continuité et limites

## I- Rappels

### 1. Continuité et limite en un réel

#### Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est continue en a alors les fonctions $\alpha f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $|f|$ et $f^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f et g sont continue en a et $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est continue en a et f est positive sur I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

#### Théorème

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues en tout réel.

#### Théorème

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a+h[$ ($h \in \mathbb{R}_+^*$).

  f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-h, a]$ ($h \in \mathbb{R}_+^*$).

  f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

  f est continue en a, si et seulement si, $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = f(a)$.

  autrement dit : f est continue en a, si et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

### 2. Prolongement par continuité

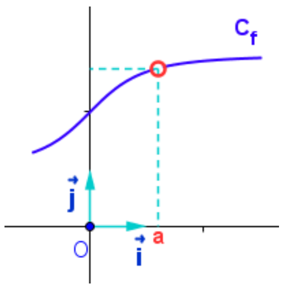
#### Théorème et définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

Si la fonction f admet une limite finie $\ell$ lorsque x tend vers a, alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$

est continue en a.

La fonction g est appelée le prolongement par continuité de f en a.




### 3. Continuité sur un intervalle

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.

- Une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ , à droite en a et à gauche en b.

De façon analogue, on définit la continue d'une fonction f sur les intervalles $[a, b[$ , $]a, b]$ , $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ .

## 4. Opérations sur les limites

Les résultats résumés dans les tableaux ci-dessous concernent les opérations sur les limites des fonctions en un réel a, à droite en a, à gauche en a ou à l'infini.

Soit $\ell$ et $\ell'$ deux réels.

### a. Limite d'une somme

| limite de f | limite de g | limite de $f+g$ |
|---|---|---|
| $\ell$ | $\ell'$ | $\ell+\ell'$ |
| $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | F.I |

### b. Limite d'un produit

| limite de f | limite de g | limite de $f \times g$ |
|---|---|---|
| $\ell$ | $\ell'$ | $\ell\,\ell'$ |
| $\ell \neq 0$ | $\infty$ | (RS)$\infty$ |
| $\infty$ | $\infty$ | (RS)$\infty$ |
| 0 | $\infty$ | F.I |

### c. Limite d'un quotient

| limite de f | limite de g | limite de $\frac{f}{g}$ |
|---|---|---|
| $\ell$ | $\ell' \neq 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ |
| $\ell$ | $\infty$ | 0 |
| $\infty$ | $\ell'$ | (RS)$\infty$ |
| $\ell \neq 0$ | 0 | (RS)$\infty$ |
| 0 | 0 | F.I |
| $\infty$ | $\infty$ | F.I |

### Théorème

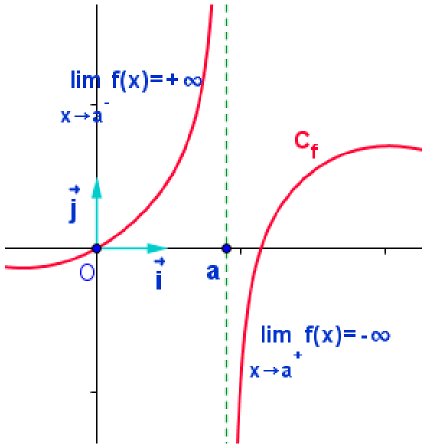
La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
la limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré

## II- Branches infinies:

### Définitions

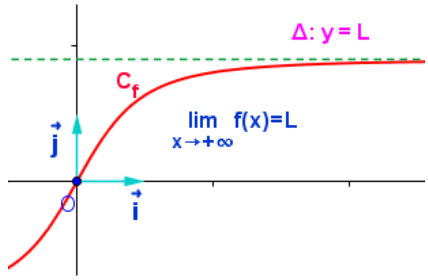
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, on dit la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $C_f$ .

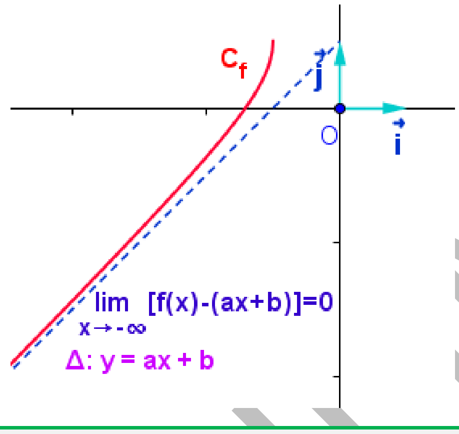



- Soit f une fonction et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ($L\in\mathbb{R}$), on dit que la droite d'équation $y=L$ est une asymptote horizontale à la courbe $C_f$.




Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ ($a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$.

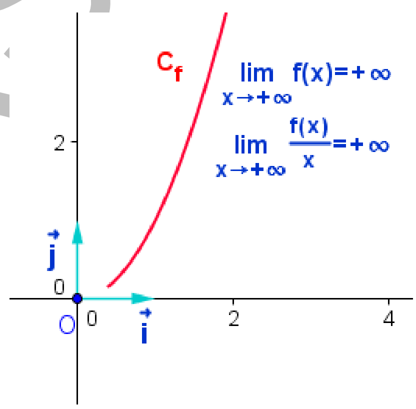



## Théorème

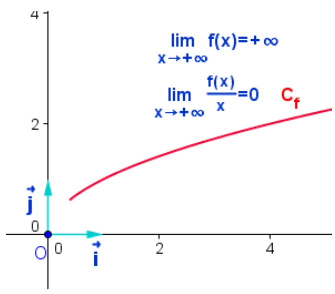
Soit f une fonction et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est infinie, alors la branche infinie de $C_f$ au voisinage de $+\infty$ dépend de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

**-** Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ est infinie, alors la courbe $C_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

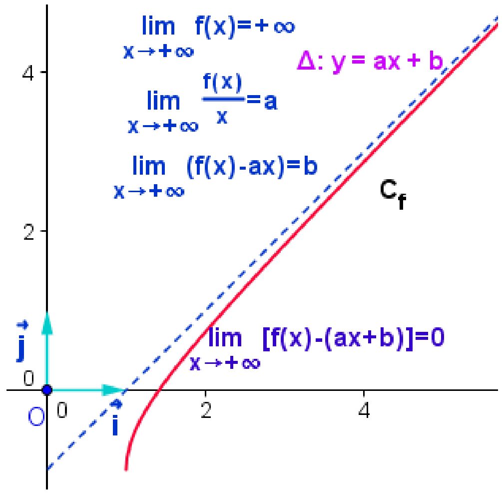



- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, alors la courbe $C_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

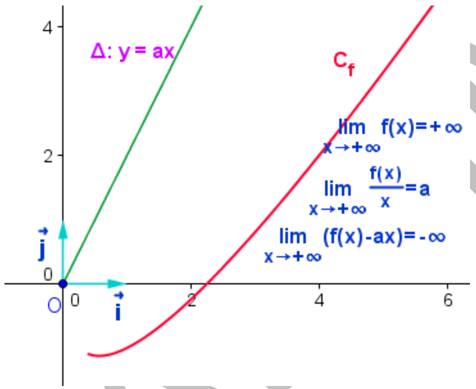



- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ ( $a\in\mathbb{R}^*$) alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ ($b\in\mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$.




*Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$.




**N.B :** Les autres cas se déterminent d'une façon analogue.

## III- Continuité et limite d'une fonction composée

### 1. Composée de deux fonctions

**Définition**

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J telle que $u(I)\subset J$. La fonction notée $v\circ u$, définie sur I par $v\circ u(x)=v(u(x))$, est appelée fonction composée de u et v.

### 2. Continuité d'une fonction composée

**Théorème**

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.

Soit v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.

Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$ alors la fonction $v\circ u$ est continue en a.

**Conséquence**

La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

**Plus précisément :** Si u est continue sur un intervalle I et v est continue sur un intervalle J telle que $u(I)\subset J$ alors la fonction $v\circ u$ est continue sur l'intervalle I.

### 3. Limite d'une fonction composée :

## Théorème :

Soient u et v des fonctions et a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{a} u = b$ et $\lim\limits_{b} v = c$ alors $\lim\limits_{a} v \circ u = c$.

## IV- Limites et ordre :

### Théorème

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut-être en un réel a de I.

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels.

* Si $u(x) \leq v(x)$, pour tout $x \in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = \ell$ et $\lim\limits_{a} v = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.

* Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, pour tout $x \in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \ell$ alors $\lim\limits_{a} f = \ell$.

* Si $u(x) \leq f(x)$, pour tout $x \in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = +\infty$ alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$

* Si $f(x) \leq u(x)$, pour tout $x \in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = -\infty$ alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$

**N.B** : Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à gauche en a, à droite en a ou à l'infini.

## III- Image d'un intervalle par une fonction continue

### Théorème (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

### Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha$ dans $[a, b]$.

En particulier si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

**Figure 1 :**

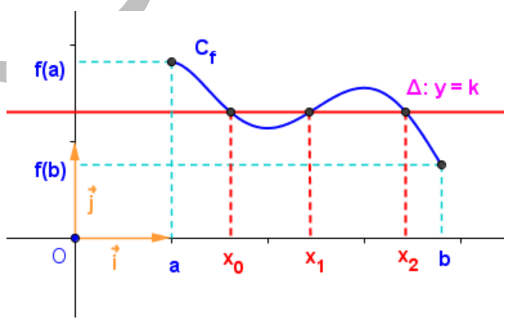
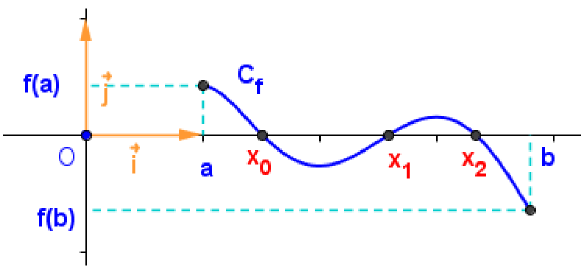



**Figure 2 :**

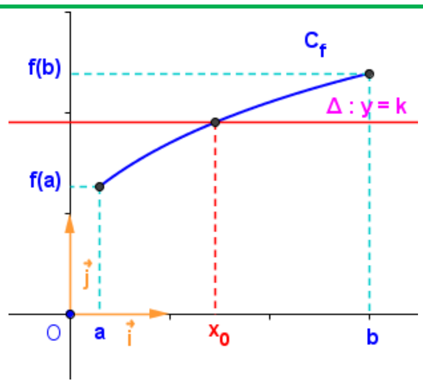



### Théorème

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a, b]$.




## Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun réel de I alors f garde un signe constant sur I.

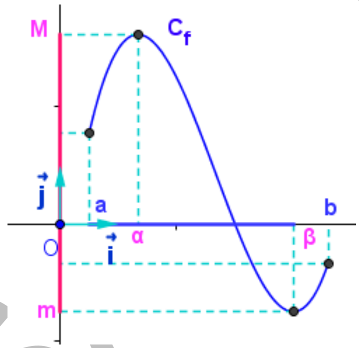
## Théorème

L'image d'un intervalle **fermé borné** $[a, b]$ par une fonction **continue** f est un intervalle **fermé borné** $[m, M]$.

m est le minimum de f sur $[a, b]$. Il existe un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $m = f(\alpha)$.

M est le maximum de f sur $[a, b]$. Il existe un réel $\beta \in [a, b]$ tel que $M = f(\beta)$

On dit que f atteint ses bornes en $\alpha$ et $\beta$.




## Théorème (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue et strictement monotone** est un **intervalle de même nature**.

## Exemples

Soient a et b deux réels.

| **Intervalle I** | **Si f est continue et strictement croissante sur I** | **Si f est continue et strictement décroissante sur I** |
|---|---|---|
| $I = [a, b]$ | $f(I) = [f(a), f(b)]$ | $f(I) = [f(b), f(a)]$ |
| $I = [a, b[$ | $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$ | $f(I) = \left]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\right]$ |
| $I = [a, +\infty[$ | $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{+\infty} f\right[$ | $f(I) = \left]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)\right]$ |
| $I = ]a, b[$ | $f(I) = \left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$ | $f(I) = \left]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\right[$ |

## Limites des fonctions trigonométriques

Soit a un réel non nul.

**1.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$ **2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(ax)}{x} = a$ **3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(ax)}{x} = 0$ **4.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$