Lycées Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp1*
Date : 11 / 05 / 2018	*Prof : Meddeb Tarek*	*Durée : 3 heures*

NB **:** *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Le nombre : $2\ln\left(\frac{e}{4}\right)+5\ln 2+\ln\left(\frac{8}{e}\right)$ est égal a :

$a/\ 1+2\ln 5$ $\qquad$ $b/\ 8\ln 2$ $\qquad$ $c/\ 1+4\ln 2$

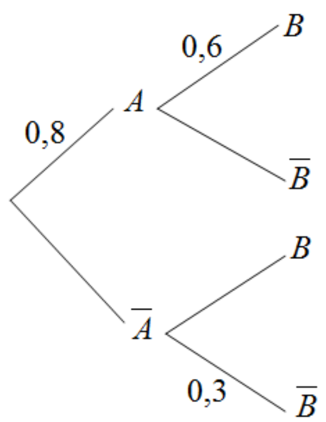
2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$ est égale à :

$a/\ 0$ $\qquad$ $b/\ +\infty$ $\qquad$ $c/\ -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ est égale à :

$a/\ 0$ $\qquad$ $b/\ +\infty$ $\qquad$ $c/\ 1$

4) Une expérience aléatoire est représenté par l'arbre pondéré suivant :



La probabilité de l'événement $A\cup B$ est :

$a/\ 0{,}48$ $\qquad$ $b/\ 0{,}94$ $\qquad$ $c/\ 0{,}14$

Exercice n°2 : (3 pts)

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = -2xe^x$.

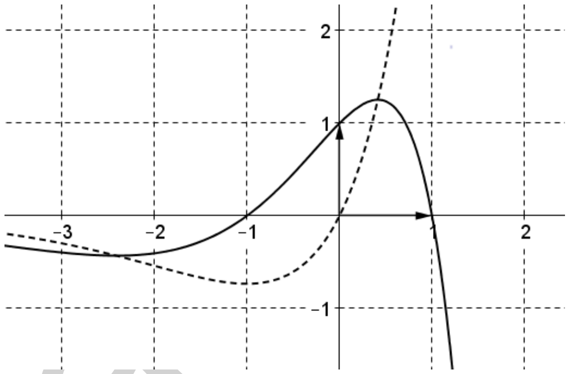
1) $a/$ Vérifier que la fonction $u : x \mapsto -x^2 e^x$ est une solution de (E).

$b/$ Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction h définie par $h(x) = f(x) - u(x)$ est une solution de l'équation $(E'): y' - y = 0$.

2) $a/$ Résoudre l'équation (E').

$b/$ En déduire les solutions de (E).

3) Dans la figure ci-dessous C et C' sont les courbes d'une solution f de (E) et de la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 2xe^x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la région du plan limitée par les courbes C et C', et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice n°3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que f est définie sur $]-\ln 2 \,; +\infty[$.

$b/$ Montrer que pour tout $x \in]-\ln 2 \,; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(2e^x - 1)\sqrt{2e^x - 1}}$.

$c/$ Etablir le tableau de variations de f. Préciser $f(0)$.

$d/$ Construire $\mathscr{C}_f$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0 \,; \pi[$ par : $g(x) = -\ln(1 + \cos x)$.

$a/$ Montrer que g est une bijection de $[0 \,; \pi[$ sur $[-\ln 2 \,; +\infty[$. On note $\varphi = g^{-1}$.

$b/$ Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(\ln(2))$.

$c/$ Montrer que φ est dérivable sur $]-\ln 2 \,; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = f(x)$.

3) Soit F la fonction définie sur $[0 \,; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

$a/$ Montrer que $F(x) = \varphi(x) - \dfrac{\pi}{2}$.

$b/$ On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la région du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que : $\mathscr{A} = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice n°4 : *(4 pts)*

Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation par une entreprise.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

Les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} prés.

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;y_i)$ dans un repère orthogonal.
2) $a/$ Calculer le coefficient de corrélation r de cette série, un ajustement affine est il fiable? Si oui déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

   $b/$ Donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2018.
3) Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus de l'année 2014 jusqu'à l'année 2018.

Année	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

   $a/$ Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

   $b/$ L'ajustement précédent est il encore adapté ? Justifier la réponse.

4) Les experts décident d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;y_i)$ pour i entier variant de 4 à 8 par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points pour cela on pose $z = \ln y$.

   $a/$ Calculer le coefficient de corrélation r' de la série $(x\ ;z)$.

   $b/$ On considère qu'une équation de la droite de régression de z en x est : $z = -0{,}134x + 5{,}402$.
   Déduire l'expression de y en fonction de x.

   $c/$ L'entreprise décide d'arrêter la fabrication de ce modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur ou égal à 50 milles. En quelle année l'entreprise doit - elle prévoir cet arrêt ?

Exercice n°5 : *(4 pts)*

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaines de fabrication A et B sont utilisées.

La chaine A produit $40\ \%$ des composants et la chaine B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner.

En sortie de la chaine A, $20\ \%$ des composants présentent ce défaut, alors qu'en sortie de la chaine B, il ne sont que $5\ \%$.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.

On considère les événements :

A : « Le composant provient de la chaine A ».

B : « Le composant provient de la chaine B ».

S : « Le composant est sans défaut ».

1) $a/$ Montrer que la probabilité de l'événement S est $p(S)=0,89$.

   $b/$ Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaine A. (on donnera le résultat à 10^{-3} près).

2) La durée de vie, en année, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   On suppose que $p(T \geq 7)=0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3) Dans cette question on prend $\lambda=0,099$.

   $a/$ On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

   $b/$ On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de deux ans. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 7 ans.

4) Un magasin délivre 20 composants fabriqués dans cette usine. On suppose que le nombre de composants fabriqués dans cette usine est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à un tirage successif avec remise.

   $a/$ Calculer la probabilité que les 20 composants délivrés sont sans défaut.

   $b/$ Déterminer le nombre moyen des composants sans défaut.