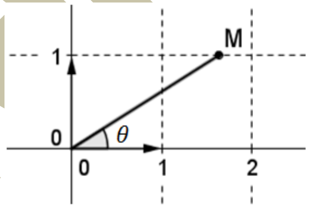
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** *Mathématiques*	*Niveau : 4 ème Sc exp1*
Date : 23 / 10 / 2017	*Prof : Meddeb Tarek*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : *(3 pts)*

Pour chaque question, une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est exacte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Sur le dessin ci-contre M est un point d'affixe z. la forme exponentielle de z est :

$a/\ \dfrac{1}{\sin\theta}e^{i\theta}$ $\qquad$ $b/\ \cos\theta\, e^{i\theta}$ $\qquad$ $c/\ \dfrac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$



2) Les nombres complexes $z_1=-2$ et $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ sont les solutions de l'équation :

$a/\ z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$.

$b/\ 2z^2+\left(3-i\sqrt{3}\right)z-2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$.

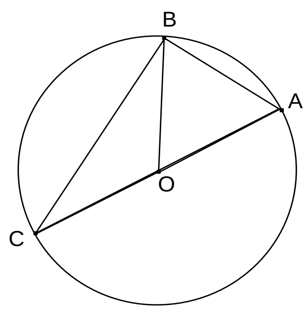
$c/\ z^2+\left(3-i\sqrt{3}\right)z-\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$.

3) Le triangle OAB est équilatéral et $[AC]$ est un diamètre du cercle.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives a, b et c.

$\dfrac{b-c}{b-a}$ est égale à :

$a/\ 1$ $\qquad$ $b/\ i$ $\qquad$ $c/\ i\sqrt{3}$.



Exercice n°2 : *(3 ,5 pts)*

1) Montrer que pour tout réel α on a : $1+e^{i\alpha}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0,\ \ \theta\in\left]0\,;\,\pi\right[$.

Résoudre l'équation (E).

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=1+\cos\theta+i\sin\theta$, $z_B=1+\cos\theta-i\sin\theta$ et $z_C=2$.

$a/$ Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes z_A et z_B.

$b/$ Déterminer θ tel que $OACB$ est un losange.

$c/$ Vérifier dans ce cas que $OACB$ est un carré.

Exercice n°3 : *(5,5 pts)*

1) $a/$ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

$b/$ Mettre les solutions sous la forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On a placé le point A d'affixe 1 et un point M d'affixe $e^{i\theta}$, où θ est un réel de l'intervalle $[0\,,2\pi[$.
(voir feuille annexe).
On désigne par P, Q et S les points d'affixes respectives $z_P = 1 + e^{i\theta}$, $z_Q = e^{2i\theta}$ et

$z_S = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

$a/$ A partir du point M, construire les points P, Q et S.

$b/$ Déterminer l'ensemble Γ des point P lorsque θ appartenant à $[0\,,2\pi[$.

Tracer l'ensemble Γ.

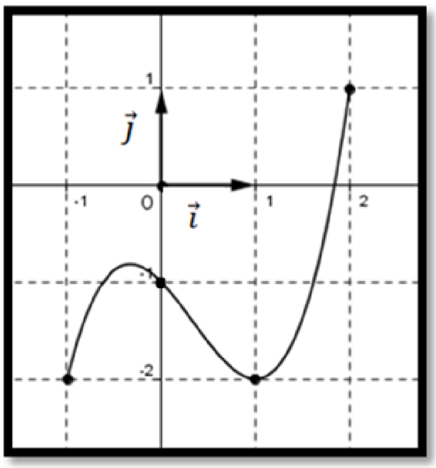
$c/$ Déterminer les valeurs de θ pour que S soit confondu avec le point O.

3) $a/$ Démontrer que le nombre $\dfrac{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{e^{i\theta}}$ est un réel, quel que soit $\theta \in [0\,,2\pi[$.

$b/$ Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice n°4 : *(8 pts)*

A- On donne sur la figure ci-contre la courbe représentative, dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction g définie sur $\left[-1;2\right]$ par : $g\left(x\right)=x^3-x^2-x-1$.



1) Par lecture graphique, déterminer :

$a/$ Le nombre de solutions de chacune des équations :

$g\left(x\right)=0$ et $g\left(x\right)=-1$.

$b/$ On désigne par α la solution de l'équation : $g\left(x\right)=0$.

Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}5$.

2) $a/$ Montrer que $\dfrac{1}{\alpha}=\alpha^2-\alpha-1$.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in\left[-1;2\right]$, on a : $g\left(x\right)=\left(x-\alpha\right)\left(x^2+\left(\alpha-1\right)x+\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

$c/$ Soit h la fonction définie sur $\left[-1;2\right]\setminus\left\{\alpha\right\}$ par : $h\left(x\right)=\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x-\alpha}$.

Montrer que h est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement.

B- Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2} & si\ x<-1\\ g(x) & si\ -1\le x\le 2\\ (x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right)+1 & si\ x>2\end{cases}.$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la continuité de f en (-1).

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x>2$, on a : $3-x\le f(x)\le x-1$. En déduire $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$b/$ Montrer que f est continue en 2.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $x<-1$, on a : $f(x)=\dfrac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{2}{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

$b/$ En remarquant que : $(x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}}$, montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$.

$c/$ Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f\circ f(x)$.

Bonne chance

Lycée Tahar Sfar Mahdia	***Devoir de contrôle n° 1*** *Mathématiques*	*Niveau : 4 ème Sc exp1*
Date : 23 / 10 / 2017	*Prof : Meddeb Tarek*	*Durée : 2 heures*

Feuille annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom :…………………………………………………… *Classe : 4 ème Sc exp …*