SERIE N°20 4 ECO SYSTEMES ET GRAPHES PROBABILISTES CORRIGEE

(PROF : ROMMANI FAHMI) (99826467)

EXERCICE N°1 :

Une usine fabrique 3 types de jouets T_1 , T_2 et T_3 en utilisant pour chaque type des roues , des lampes et des antennes .

	Nombre de roues	Nombre de lampes	Nombre d'antennes
Type T_1	8	18	8
Type T_2	6	15	12
Type T_3	4	21	16

En total 500 roues , 1650 lampes et 1160 antennes ont été utilisées .

1/ Traduire la situation en un système (S)de 3 équations à 3 inconnues x , y et z qui sont respectivement le nombre de jouets de types T_1 , T_2 et T_3 .

2/Montrer que le système (S) est équivalent à : $\begin{cases} 4x+3y+2z=250 \\ 6x+5y+7z=550 \\ 2x+3y+4z=290 \end{cases}$

3/ Ecrire le système (S) sous forme matricielle M.A=B avec M est la matrice du système , A est celle des inconnues et B celle des constantes.

4/ Montrer que M est inversible .

5/Soit la matrice $N=\begin{pmatrix} -1 & -6 & 11 \\ -10 & 12 & -16 \\ 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit MxN.

b) En déduire la matrice M^{-1} inverse de M.

6/ résoudre alors le système (S) .

EXERCICE N°2

Deux joueurs de Tennis appelés A et B décident de jouer une partie chaque semaine. La probabilité que A gagne la première semaine est 0,8.

Si A gagne la partie à la semaine " n" alors la probabilité qu'il gagne la semaine " n+1 " est 0,7.

Si A perd la partie à la semaine " n" alors la probabilité qu'il gagne la semaine " n+1 " est 0,5.

Pour tout entier $n \geq 1$ on note les événements :

A_n : l'évènement le joueur A gagne la partie la semaine "n" et a_n la probabilité de A_n.

B_n : l'évènement le joueur B gagne la partie la semaine "n" et b_n la probabilité de B_n.

On note : P_n = [a_n b_n] la matrice des probabilités associée à la semaine "n".

1/ Décrire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste .

2/ Donner la matrice M de transition de ce graphe .

3/Déterminer les matrices M^2 et M^3.

4/ Calculer la probabilité que A gagne la partie à la semaine 4 .

5/ Trouver la matrice P décrivant l'état stable du graphe .

Correction :

EXERCICE N°1 :

1/ (S) : $\begin{matrix} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{matrix} \begin{cases} 8x + 6y + 4z = 500 \\ 18x + 15y + 21z = 1650 \\ 8x + 12y + 16z = 1160 \end{cases}$

2/ (S) $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} (E'_1) \leftarrow (E_1)/2 \\ (E'_2) \leftarrow (E_2)/3 \\ (E'_3) \leftarrow (E_3)/4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 250 \\ 4x + 5y + 7z = 550 \\ 2x + 3y + 4z = 290 \end{cases}$.

3/ (S) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 550 \\ 290 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M.A = B$

avec : $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $et\ B = \begin{pmatrix} 250 \\ 550 \\ 290 \end{pmatrix}$.

4/ dét(M)= $\begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = +4.\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 6.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

= +4.(5x4-7x3)-6.(3x4-3x2) +2.(3x7-2x5)

= 4x(-1)-6x6+2x11

=-18

dét(M)$\neq 0 \Rightarrow M\ est\ invérsible.$

5/ a)

$$\times \begin{pmatrix} -1 & -6 & 11 \\ -10 & 12 & -16 \\ 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

MxN=$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = -18.I_3$

c) M^{-1}= $\frac{1}{-18}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 11 \\ -10 & 12 & -16 \\ 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & \frac{-11}{18} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{8}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$

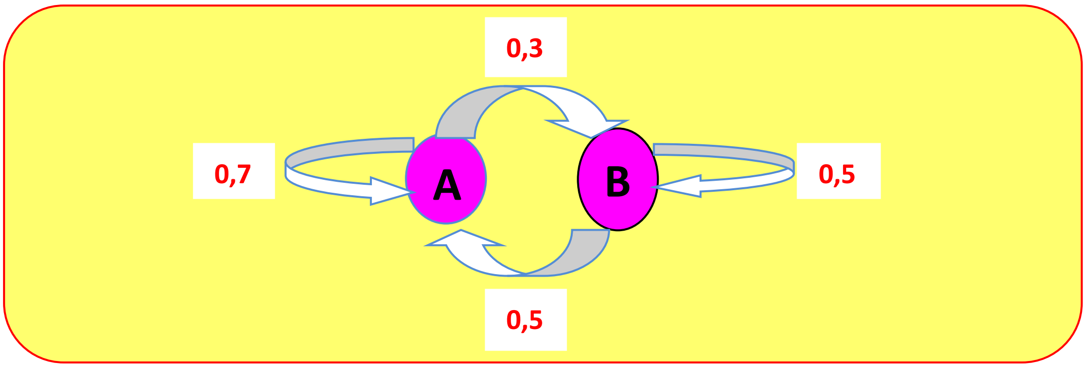
6/ (S) $\Leftrightarrow M.A = B \Leftrightarrow M^{-1}M.A = M^{-1}.B \Leftrightarrow I_3.A = M^{-1}.B \Leftrightarrow A = M^{-1}.B$

$$\times \begin{pmatrix} 250 \\ 550 \\ 290 \end{pmatrix}$$

D'où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & \frac{-11}{18} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{8}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ alors $S_{\mathbb{R}^3} = \{(20; 30; 40)\}$

EXERCICE N°2 :

1/



2/

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

3/

$$\times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,36 \\ 0,60 & 0,40 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,36 \\ 0,60 & 0,40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \\ 0,620 & 0,380 \end{pmatrix}$$

4/ $P_4 = P_1 \times M^3 = (0,8 \quad 0,2).\begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \\ 0,620 & 0,380 \end{pmatrix} = (0,6264 \quad 0,3734)$

5/ L'état stable est décrit par la matrice ligne P=(x y) solution de l'équation X.M=X avec x + y =1

X.M=X⇔ $(x \quad 1-x).\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (x \quad 1-x)$

alors 0,7x+0,5.(1-x)=x alors 0,2x+0,5=x alors 0,8.x=0 ,5

alors x $= \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8}$ d'où P = ($\frac{5}{8}$ $\frac{3}{8}$).