Problème 1

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = x+2-e^x$

1) Etudier le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que $\alpha \in]1,1 ;1,2[$
3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,,\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique 4cm)

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$
2) a) Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

   b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu
3) Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ (Utiliser A/2))
4) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (ζ) au point d'abscisse 0
5) a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$ $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ ou $u(x) = e^x - xe^x - 1$

   b) Etudier le sens de variation de la fonction u sur $[0,+\infty[$;En déduire le signe de $u(x)$

   c) Déduire la position de (ζ) par rapport à la tangente T

6) Tracer (ζ) et T

7) On note D le domaine délimité par la courbe (ζ) la tangente T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.Calculer en cm² l'aire A du domaine D

8) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

   a) Calculer V_0, V_1 et V_2

   b) Interpréter graphiquement V_n

   c) Montrer que pour tout $n \geq 2$,$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$

   d) En déduire la monotonie de la suite (V_n) à partir de $n=1$

   e) Déterminer la suite V_n

Problème 2

Partie A :

Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $(o,,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (ζ) de la courbe logarithme népérien « ln » ainsi que la courbe (C_f) de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\, e^{2-x}$

1) a) Placer les points de (ζ) d'abscisse e et $\sqrt{e}$

   b) Calculer $f(1)$ puis donner le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - f(x)$

   a) Montrer que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

   b) Dresser le tableau de variation de g

   c) Montrer que l'équation $f(x) = \ln x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$ puis vérifier que $3<\alpha<3,1$

   d) En déduire le signe de g sur $[1,+\infty[$

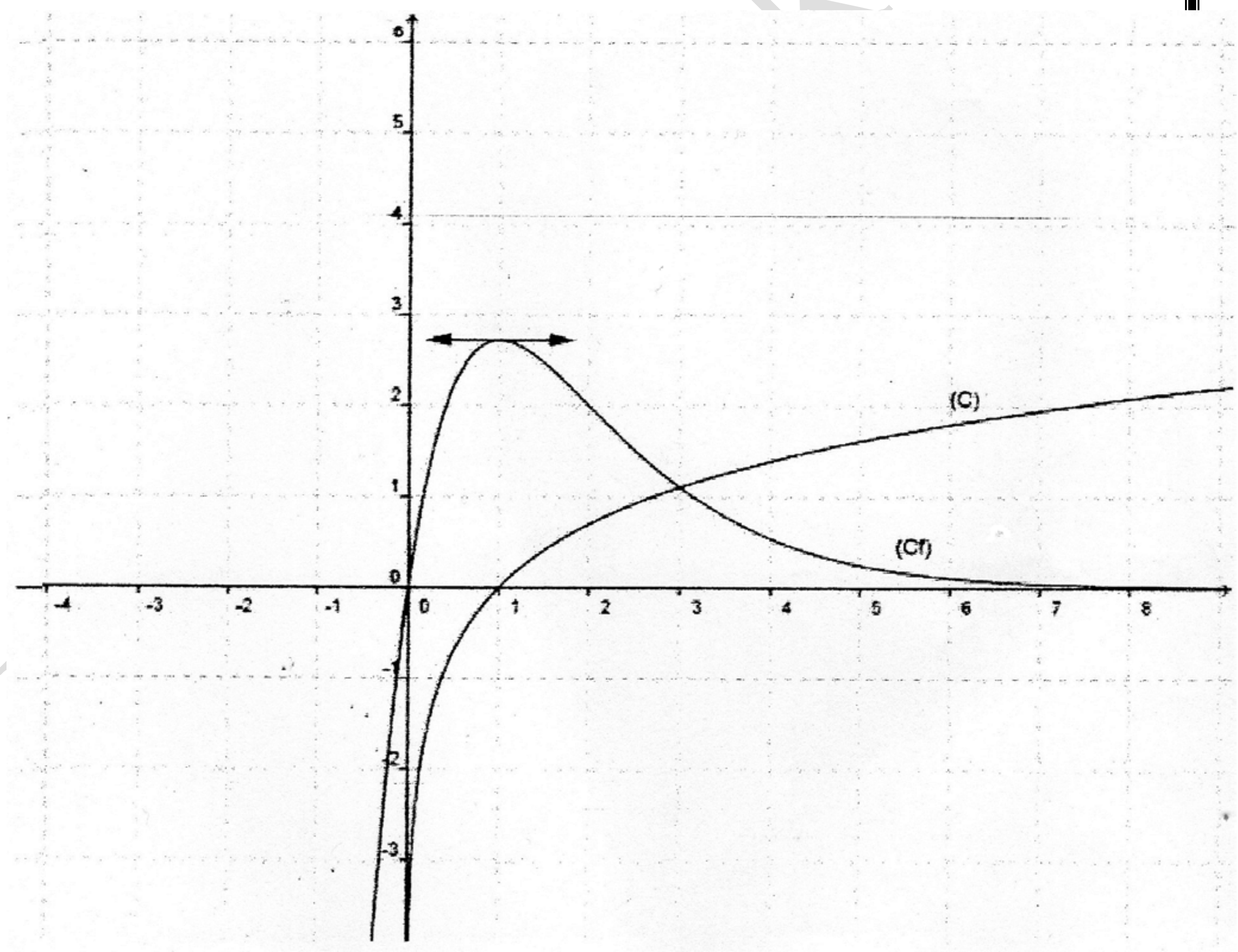
   e) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

   f) Tracer (C_g) dans l'annexe ci-jointe

Partie B

On pose $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x}\, dx$

1) A l'aide d'une double intégration par parties ,montrer que $I=\frac{1}{4}-\frac{25}{4}e^{-6}$
2) On définit le solide S obtenu par révolution autour de l'axe des abscisses de la courbe $y = f(x)$ pour $0\leq x \leq 3$
   Exprimer le volume V du solide S en fonction de I .
   Déterminer alors la valeur exacte de V en unité de volume .



Problème 3

A) 1°) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$

2°) Soit l'équation différentielle (E) : $-y' + y = 1 + e^x$

a- Vérifier que la fonction définie sur [0 , +∞[par g(x) = $e^x - xe^x + 1$. est une solution de (E).

b- Montrer qu'une fonction U est solution de (E) équivaut à U - g est solution de (E_0)

c- En déduire toutes les solutions de (E).

B) 1°) Soit g la fonction définie sur [0 , +∞[par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

a- Dresser le tableau de variation de g sur [0 ,+∞[.

b- Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans [0 , +∞[une solution unique α et que

$1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

c- Donner alors le signe de g sur [0 , +∞[.

2°) Soit h la fonction définie sur [0 , +∞[par $h(x) = \frac{4x}{e^x+1}$

a- Montrer que $h'(x) = \frac{4.g(x)}{(e^x+1)^2}$

b- Montrer que $h(\alpha) = \frac{4}{\alpha - 1}$

c- Dresser alors le tableau de variation de h sur [0 , +∞[.

3°) On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur [0 , +∞[par

$f(x) = \frac{4}{e^x+1}$. (**Annexe 2**) *a- Soit x un réel >0 . Placer sur la figure les points M (x , f(x)) ; P (x , 0) et Q (0 , f(x)).*

b- Calculer en fonction de x l'aire du rectangle OPMQ.

c- Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle OPMQ soit maximale.

4°) On pose $U_n = \int_0^n f(x)dx$.

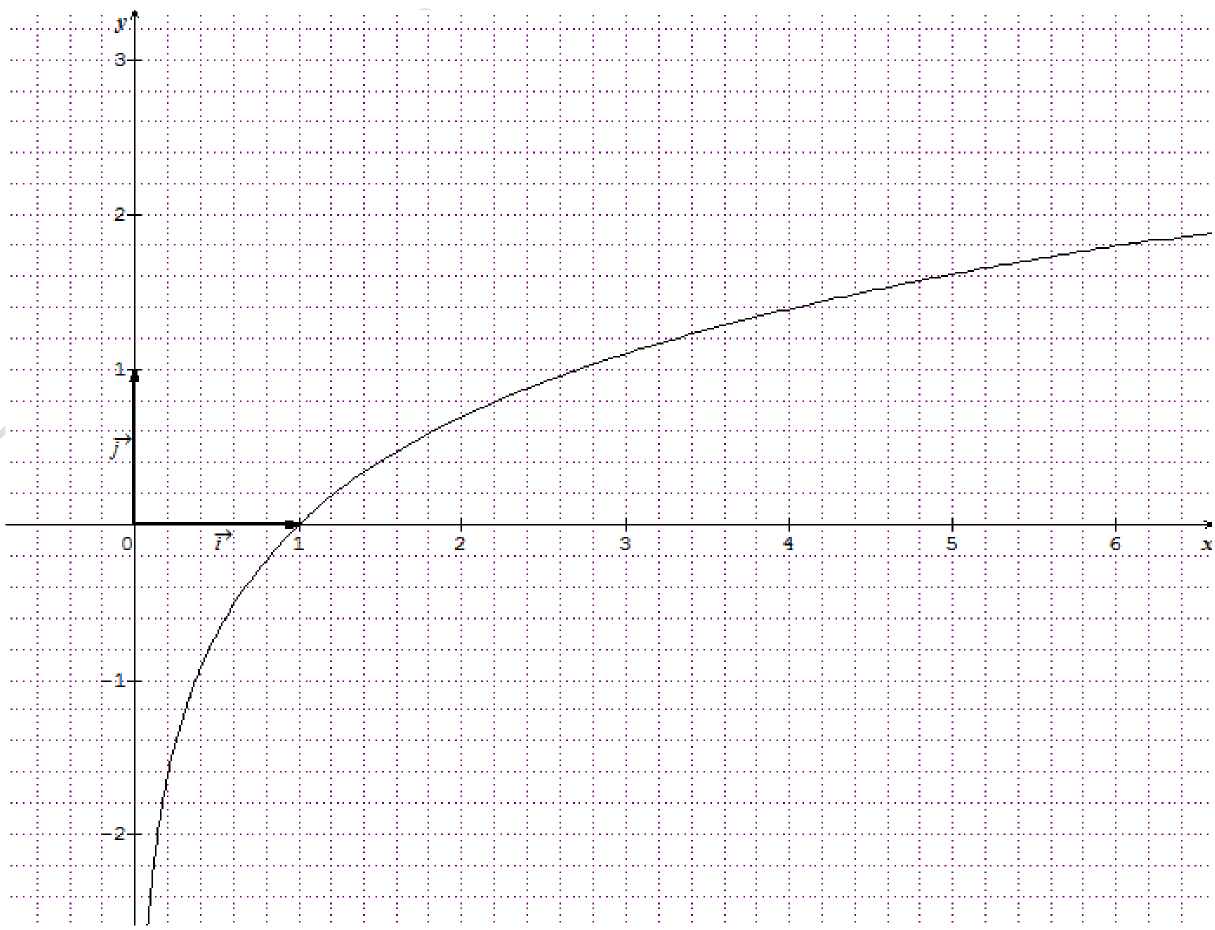
a- Hachurer avec deux couleurs différentes la partie du plan dont l'aire est définie

par $\mathcal{A} = f(1) + f(2) + f(3)$ *puis* $B = f(0) + f(1) + f(2)$.

b- Vérifier que $\mathcal{A} < U_3 < B$

c- Vérifier que $f(x) = \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}$ *; Donner alors la valeur exacte de* U_3.

ANNEXE I



ANNEXE II