Exercices Ln (bac scientifique)   Mr. FATNASSI BECHIR

Exo. n°1 : (Enoncé)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1°/ a / $\ln(x+1)+\ln(x+5)=\ln(21)$ **b /** $\ln|x+1|+\ln|x+5|=\ln(21)$

2°/ a / $\ln\left[(x-4)(3x-5)\right]=\ln(10)$ **b /** $\ln(x-4)+\ln(3x-5)=\ln(10)$

3°/ a / $\ln(2-x)+\ln(3x+2)=\ln(5)$ **b /** $\ln(-3x^2+4x+4)=\ln(5)$

4°/ a / $\ln(x^2-3x+3)=0$ **b /** $\ln\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)-1=0$

5°/ a / $\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(4x-8)$ **b /** $\ln^2(x)+\ln(x)-2=0$

6°/ a / Décomposer le polynôme : $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$ en produit de facteurs du premier degré.

b / Résoudre dans $\mathbb{R}$ l équation : $2\left(\ln(x)\right)^3+\left(\ln(x)\right)^2-5\ln(x)+2=0$

Exo. n°1 : (Solution)

1°/ a / $\ln(x+1)+\ln(x+5)=\ln(21)$ (1)

Pour que cette équation ait un sens il faut $\begin{cases} x+1>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1$

Pour $x\in\left]-1,+\infty\right[$ l'équation est équivalente à : $\ln(x+1)(x+5)=\ln(21)$

Et comme la fonction Log est bijective on a : $(x+1)(x+5)=21 \Leftrightarrow x^2+6x-16=0$

D'où l'équation (1) équivaut au système $\begin{cases} x^2+6x-16=0 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \text{ ou } x=2 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\{2\}$

b / $\ln|x+1|+\ln|x+5|=\ln(21)$ (2)

Pour que cette équation ait un sens il faut $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -5 \end{cases}$

L'équation (2) est équivalente à : $\begin{cases} |x^2+6x+5|=21 \\ x\neq -1 \text{ et } x\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5=21 \\ x\neq -1 \text{ et } x\neq -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+6x+5=-21 \\ x\neq -1 \text{ et } x\neq -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-16=0 \\ x\neq -1 \text{ et } x\neq -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+6x+26=0 \\ x\neq -1 \text{ et } x\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-8 \text{ ou } x=2$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\{-8,2\}$

2°/ a / $\ln\left[(x-4)(3x-5)\right]=\ln(10)$ (3)

Pour que cette équation ait un sens il faut $(x-4)(3x-5)>0 \Leftrightarrow 3x^2-17x+20>0$

$\Delta=49$ d'où les zéro du trinôme 3x²-17x+20 sont : $\dfrac{5}{3}$ et 4

$3x^2-17x+20>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\dfrac{5}{3}\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

FATNASSI BECHIR

L'équation (3) est équivalente à $\begin{cases}(x-4)(3x-5)=10\\ x\in\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[\cup\left]4,+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-17x+10=0\\ x\in\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[\cup\left]4,+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ ou $x=5$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2}{3},\ 5\right\}$

b / $\ln(x-4)+\ln(3x-5)=\ln(10)\Leftrightarrow\begin{cases}x-4>0\\3x-5>0\\(x-4)(3x-5)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\3x^2-17x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\{5\}$

3°/ a / $\ln(2-x)+\ln(3x+2)=\ln(5)\Leftrightarrow\begin{cases}2-x>0\\3x+2>0\\(2-x)(3x+2)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{2}{3}<x<2\\-3x^2+4x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{1}{3}$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{3}\ ,1\right\}$

b / $\ln(-3x^2+4x+4)=\ln(5)\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+4x+4>0\\-3x^2+4x+4=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{2}{3}<x<2\\-3x^2+4x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=1$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{1}{3},\ 1\right\}$

4°/ a / $\ln(x^2-3x+3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+3>0\\x^2-3x+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\x^2-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ ou $x=2$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\{1,2\}$

b / $\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)-1=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-2}{x-1}>0\\\frac{x-2}{x-1}=e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[\\x=\frac{e-2}{e-1}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{e-2}{e-1}$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{e-2}{e-1}\right\}$

5°/ a / $\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(4x-8)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x-3>0\\4x-8>0\\(x+1)(x-3)=4x-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>3\\x>2\\x^2-6x+5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\x=1\text{ ou }x=5\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=5$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\{\ 5\ \}$

b / $\ln^2(x)+\ln(x)-2=0$ En posant $t=\ln(x)$; $x>0$ l'équation est alors équivalente à :

$\begin{cases}t=\ln(x)\\t^2+t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)=1\\\text{ou}\\\ln(x)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e\\\text{ou}\\x=e^{-2}\end{cases}$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}}=\left\{e\ ,\ \frac{1}{e^2}\right\}$

FATNASSI BECHIR

6°/ a / $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

La somme des coefficients du polynôme est égale à 0. Donc $x=1$ est une racine de $P(x)=0$

On a : $2\times(1)^3+(1)^2-5\times(1)+2=0$

$$P(x)=\left(2x^3+x^2-5x+2\right)-\left(2\times(1)^3+(1)^2-5\times(1)+2\right)=2\left(x^3-1^3\right)+\left(x^2-1^2\right)-5\left(x-1\right)$$

$$=(x-1)\left[2(x^2+x+1)+(x+1)-5\right]=(x-1)(2x^2+3x-2)$$

Le trinôme $2x^2+3x-2$ admet pour racines : $x'=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{4}=-2$ $\qquad x''=\dfrac{-3+\sqrt{25}}{4}=\dfrac{1}{2}$

D'où $P(x)=2(x-1)(x+2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=(x-1)(x+2)(2x-1)$

b / $2\left(\ln(x)\right)^3+\left(\ln(x)\right)^2-5\ln(x)+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\ln(x) \\ 2t^3+t^2-5t+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\ln(x) \\ (t-1)(t+2)(2t-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x)-1=0 \\ \text{ou} \\ \ln(x)+2=0 \\ \text{ou} \\ 2\ln(x)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x)=1 \\ \text{ou} \\ \ln(x)=-2 \\ \text{ou} \\ \ln(x)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e \\ \text{ou} \\ x=e^{-2} \\ \text{ou} \\ x=\sqrt{e} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : $S_{\mathbb{R}}=\left\{e\ ,\ \dfrac{1}{e^2}\ ,\ \sqrt{e}\right\}$

<u>Prof. Mr. FATNASSI BECHIR</u>

<u>LYCEE SECONDAIRE DE KORBA</u>