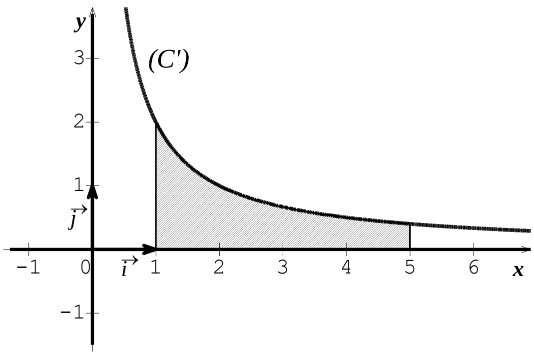
Lycée Ibn Sina Mahdia	Discipline :Mathématiques	Profs:M.BAYOUDHI-G.SFAXI	
Date :6/03/2019	Devoir de synthèse N°2	Niveau:4èmeSc	Durée:3h

Exercice N°1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que sa courbe (C) passe par les points A(1,0) et B(5,2ln2).

Dans la figure ci- contre ,on a représenté la courbe (C') de la dérivée f 'de la fonction f.



Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant** la réponse.

1/(C) admet une tangente horizontale.

2/Une équation cartésienne de la tangente à (C) au point A est :2x-y-2=0.

3/L'aire de la partie hachurée est égale à 2ln2.

4/Pour tous réels a et b de [1,5] , $|f(b)-f(a)| \leq 2|b-a|$.

Exercice N°2 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par f(x)= $\ln^3(x)$-3ln(x).

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1/Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.Interpréter graphiquement.

2/Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement.

3/a)Montrer que $\forall\, x \in]0,+\infty[$,f '(x) $= \frac{3(\ln x-1)(\ln x+1)}{x}$.

b)Dresser le tableau de variation de f.

4/Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5/Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

a)Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b)Tracer (C') la courbe représentative de g^{-1} sur le même repère.

6/Soit la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n=\int_1^e \ln^n(x)dx$.

a)Calculer a_1.

b)Montrer, à l'aide d'une intégration par parties ,que pour tout $n \geq 1$,

$a_{n+1}= e-(n+1)\, a_n$.

c)En déduire que $a_3= 6-2e$.

7/Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites

$x = -2$ et $x= 0$.

a)Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

b) En déduire $\mathcal{A}$.

Exercice N°3 (7 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points A (1,1,1), B(0,4,0) ,C(0,0,2) et I(-1,1,-1).

1/a)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b)En déduire que A,B et C déterminent un plan unique P dont une équation cartésienne est $x+y+2z-4 = 0$.

2/Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCI.

3/Soit S l'ensemble des points M (x,y,z) de l'espace tel que

$x^2 +y^2 +z^2+2x-2y +2z-8 = 0$.

Prouver que S est une sphère de centre I et préciser son rayon.

4/a)Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le rayon.

b)Vérifier que [BC] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$. En déduire les coordonnées du point H centre du cercle $\mathcal{C}$.

5/Soient α un réel et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$.

a)Montrer que $\overrightarrow{BM} . \overrightarrow{CM} = 11\alpha^2 - 8\alpha -3$.

b)En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$.

c)Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre AECI est égale à $\frac{3}{11}\mathcal{V}$.

6/a) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par I et parallèle à P.

b) Prouver que pour tout point M_o du plan Q le volume du tétraèdre $ABCM_o$ est constant .

Exercice N°4 (3 points)

Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ dt.

1/Montrer que F est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa fonction dérivée.

2/Montrer que F est impaire.

3/Soit H la fonction définie sur $]0,\pi[$ par H(x) = F(cosx) = $\int_0^{cosx} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ dt.

a) Montrer que H est dérivable sur $]0,\pi[$ et calculer H'(x).

b)En déduire que $\forall\, x \in\,]0,\pi[$, H(x) = $\frac{\pi}{2}$ – x.

c)Déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ dt.