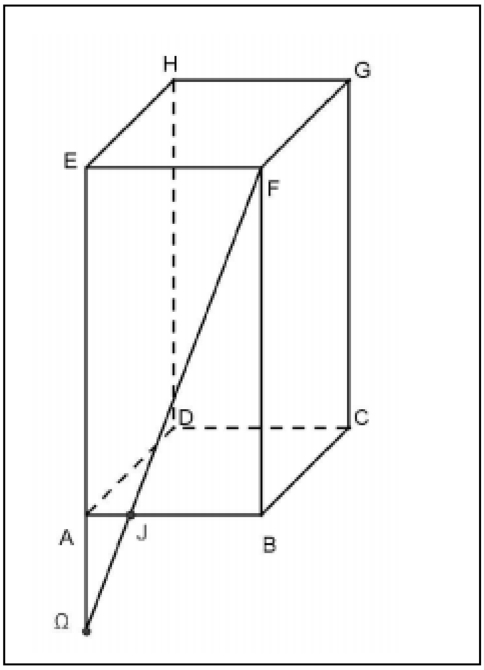
Exercice N°1 : 05 pts



L'espace (E) rapporte a un repère orthonormé

Direct R = (A ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) . on donne le parallélépipède

ABCDEFGH tel que B(a ; 0 ; 0) ; D (0 ; a ; 0) et E (0 ; 0 ; 2a)

Ou a un réel strictement positif . on désigne par J le point de

l'arrête [AB] tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et par K le point

d'intersection de la droite (AE) et de la droite (JF) .

Soit h l'homothétie de centre K qui transforme A en E

1°) a- Montrer que h (J) = F

b- Donner par ces coordonnes le point K .

c- Déduire les expressions analytiques de h .

2°) Soit M à l'intérieur du carre ABCD tel que AJM soit un triangle équilatérale . on désigne par N l'image de M par h

a-Montrer que le triangle EFN est équilatérale

b-Calculer en fonction de a le volume du solide AJMEFN .

3°) Soit I le centre du carre EFGH .

Montrer que les droites (KI) et (AC) sont sécantes .

Exercice N°2 : 03 pts

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct R = (0 ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) . on donne les points

A(3 , 2 , 6) ; B (1 , 2 , 4) et C (4 , -2 , 5) et G le barycentre des points pondérés (O ,3) ; (A , 1) (B , 1) et (C , 1)

1) Montrer que les points A . B et C définissent un seul plan $\mathscr{P}$ d'équation 2x + y – 2z +4 = 0
2) Soit l'ensemble S des points M de l'espace tel que $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$.
   a- Déterminer S puis $S \cap \mathscr{P}$
   b- Déterminer les translations qui transforment le plan $\mathscr{P}$ à un plan tangente au sphère S
   c- Déduire une équation cartésienne à chacun de ses plans .

Exercice N°3 : 05 pts

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \int_0^1 e^x\, dx$ et pour tout entier $n \geq 1$ définie par :

$U_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\, e^x dx$

1) a- Calculer $\int_0^1 (1-x)^n\, dx$

b-a l'aide de l'encadrement $1 \leq e^x \leq e$ sur l'intervalle [0 ; 1] montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\frac{1}{(n+1)!} \leq U_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

d- Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

2) a- Calculer U_0 et U_1 à l'aide d'une intégration par parties .

b- Etablir en intégrant par parties ; que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $U_{n-1} - U_n = \frac{1}{n!}$

3) On pose pour tout entier $n \geq 1$: $V_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$.

a- En utilisons la question précédente exprimer V_n en fonction de U_0 et U_n .

b- En déduire la limite L de la suite (V_n) .

c- Montrer que : $\frac{1}{(n+1)!} \leq L - V_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

Exercice N°4 : 07 pts

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur IR par : $f(x) = Ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right)$

1°) Etudier la dérivabilité de f a droite en (- 1)

2°) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (ζ) dans le plan rapporte à un repère Orthonormé ($O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$) (unité graphique 2 cm) .

Préciser la tangente au point O .

3°) a – Montrer que f réalise une bijection de $[-1\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b- On note f^{-1} la fonction réciproque de f . Montrer que $f^{-1}(x) = 4(e^{2x} - e^x)$ $\forall\ x \in J$

c – Tracer la courbe representative (ζ') de f^{-1} dans le même repère .

4°) a – calculer en cm^2 l'aire du domaine (D') limite par la courbe (ζ') , l'axe des ordonnees Et la droite d'équation : $y = -1$.

b - En déduire l'aire du domaine (D) limite la courbe (ζ) , l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = -1$.

5°) a- à l'aide d'une intégration par partie , calculer $\int_{-Ln\,2}^{0} t(f^{-1})'(t)dt$

b- Soit F une primitive de f sur [– 1 ; +∞ [. Montrer que $F \circ f^{-1}$ *est une primitive de la fonction* $t \longrightarrow t(f^{-1})(t)$ *. sur J .*

c – En déduire que : $\int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{-Ln\,2}^{0} t(f^{-1})'(t)dt$ *.*

retrouver alors l'aire du domaine (D) .

Bonne chance