Lycée Pilote de Sfax Le 05-11-2018	Devoir de contrôle N°1 Mathématiques	Classes : $4^{ème}$ Math Durée : 2 heures

Mrs : Zribi, Trigui, Megdich, Jellali, Smaoui et El arbi.

Exercice 1 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(0)=\dfrac{\pi^2}{2} \\ f(x)=\dfrac{1-\cos(\pi\sqrt{x})}{x} & \text{si } x\in]0,1] \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+2} & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

② a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1]$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,1]$.

c) f est-elle dérivable en 1 ?

③ a) Montrer que f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

b) Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

c) Dans l'annexe (I) on a tracé la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Tracer C_f sachant que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

④ Dans l'annexe (II) on a tracé la courbe C_g d'une fonction g définie sur $[0, +\infty[$ dans un repère $(O',\vec{u},\vec{v})$.

C_g admet une branche parabolique de direction celle de $(O',\vec{v})$ au voisinage de $+\infty$.

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x)=f\circ g(x)$ et C_h sa courbe dans le repère $(O',\vec{u},\vec{v})$.

a) Montrer que h est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que h est dérivable à droite en 0.

d) Etudier la nature de la branche infinie de C_h au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que pour tout $x\in[1, +\infty[$, $f(x)>x$.

f) En déduire la position relative de C_h et C_g.

g) Tracer, dans l'annexe (II), une allure de C_h.

Exercice 2 (7 points)

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): Z^2 - 2e^{i\theta} Z + 1 = 0$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

① Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes Z_1 et Z_2.

(On ne demande pas de déterminer ces solutions).

② Montrer que les solutions de (E) ne sont pas réelles.

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, -1, Z_1$ et Z_2.

On désigne par K le milieu du segment $[M_1M_2]$ et par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

① Montrer que K appartient au cercle $\mathscr{C}$.

② a) Montrer que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4\left(Z_K^2 - 1\right)$.

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{KB}}\right)[2\pi]$.

c) Dans l'annexe (III) on a placé un point K. Tracer la droite (M_1M_2).

③ a) Montrer que $\dfrac{Z_2 + 1}{Z_2 - 1} = -\dfrac{Z_1 + 1}{Z_1 - 1}$.

b) En déduire que les points A, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle.

c) Construire alors les points M_1 et M_2.

Exercice 3 (5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{1 \times 1!}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 2!}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) u_n.$$

① Montrer que la suite (u_n) est croissante.

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!} \times \left(\dfrac{n}{(n+1)(n+1)!} - n^2 - 1\right) u_n$.

b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante.

③ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n \leq \dfrac{4}{n}$.

④ En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel L et que $\dfrac{5}{2} \leq L \leq \dfrac{25}{8}$.