Série de révision s2

Exercice n°1

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x) + 1$

1) Calculer $f(\frac{17\pi}{8})$ et $f(\frac{21\pi}{8})$.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $\cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2\cos x(\cos x - \sin x)$.

b) Résoudre alors dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice n°2

On donne les nombres complexes $a = 1 + i$ et $b = -\left(\sqrt{3} + i\right)$.

1. a) Calculer le module et déterminer un argument de a et de b.

   b) Calculer le module et déterminer un argument de $u = \frac{b}{a}$.

   c) Calculer u sous forme cartésienne.

   d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

2. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et $\bar{b}$.

   a) Placer A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b) Quelle est la nature du triangle CAB ? (Justifier).

   c) Déterminer l'affixe du point D pour que ACBD soit un rectangle.

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 1}{x - 2}$,

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 9}{(x-2)^2}$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Vérifier que pour $x \neq 2$, $f(x) = 2x - \frac{1}{x - 2}$

b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

5) Montrer que le point $I(2, 4)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

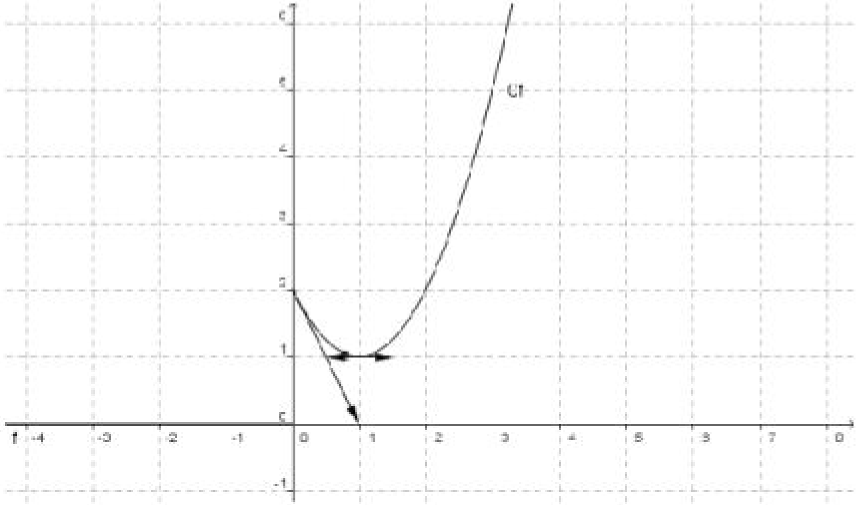
6) Tracer $(\mathscr{C})$.

7) Existe-t-il des points de $(\mathscr{C})$ où la tangente est parallèle à la droite $\Delta : y = x + 5$.

Exercice n°4

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0, +\infty[$

On note f ' la fonction dérivée de f.



1) A partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

   a- Déterminer f (0), f (1), $f'_d(0)$ et f '(1).

   b- Donner le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$

   c- Déterminer une équation de la demi-tangente (T) au point d'abscisse 0.

2) On considère la fonction g inverse de la fonction f c'est-à-dire $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. On note g' la fonction dérivée de g.

   a- Déterminer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b- Quel est le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$? Justifier votre réponse.

www.devoirat.net 2019

Exercice n°5

Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = i \quad , z_B = 1 - i \quad , \quad z_C = 5 + i \quad , \quad z_D = 4 + 3i \ .$$

1/Montrer que ABCD est un rectangle.

2/Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{M(z) tels\ que\ |iz| = |4 - 3i - \bar{z}|\}$$

$$\mathcal{F} = \{M(z) tels\ que\ |(1-i)\bar{z} - (4-6i)| = 2\sqrt{2}\}$$

3/Soit l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M(z) distinct de B, associe M'(z') tel que $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

a) Montrer que f admet deux points invariants situés sur l'axe $(O, \vec{u})$.

b) Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$.

c) Déduire l'ensemble des points M tel que M' appartient au cercle trigonométrique.

4/a) Montrer que $z' - i = \frac{2+i}{z-1+i}$.

b) Déduire l'ensemble des points M' lorsque M appartient au cercle de centre B de rayon 1.

5/a) Vérifier que $z' = i\left(\frac{z-i}{z-1+i}\right)$.

b)Déduire l'ensemble des points M tel que M' décrit l'axe $(O, \vec{v})$.

6/a) On pose $Z = 2\, z_B$. Donner une écriture trigonométrique de Z.

b) Soit $b = \sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ .Vérifier que $b^2 = Z$.

c)Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) et \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

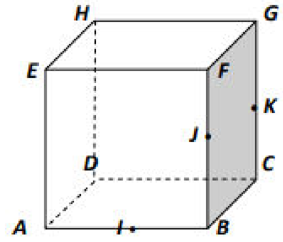
d) Soit n entier naturel. Pour quelles valeurs de n, b^n est-il un réel ?

Exercice n°6

Justifier par calculs

*Soit **ABCDEFGH** un cube d'arête **1** .*

I** , **J** et **K** sont les milieux respectifs des arêtes [**AB**] , [**BF**] et [**CG**] . Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est **vraie** ou **fausse** en **justifiant votre réponse



1) ***AJC*** *est un triangle isocèle .*

2) $2\vec{IJ} + \vec{ED} = \vec{AC}$.

3) *Les points **I** , **J** et **K** sont alignés .*

4) *Les vecteurs* $\vec{AC}$, $\vec{BG}$ *et* $\vec{AH}$ *sont coplanaires .*

5) ($\vec{AC}$, $\vec{AG}$, $\vec{BF}$) *est une base de* $\mathcal{W}$.

www.devoirat.net 2019