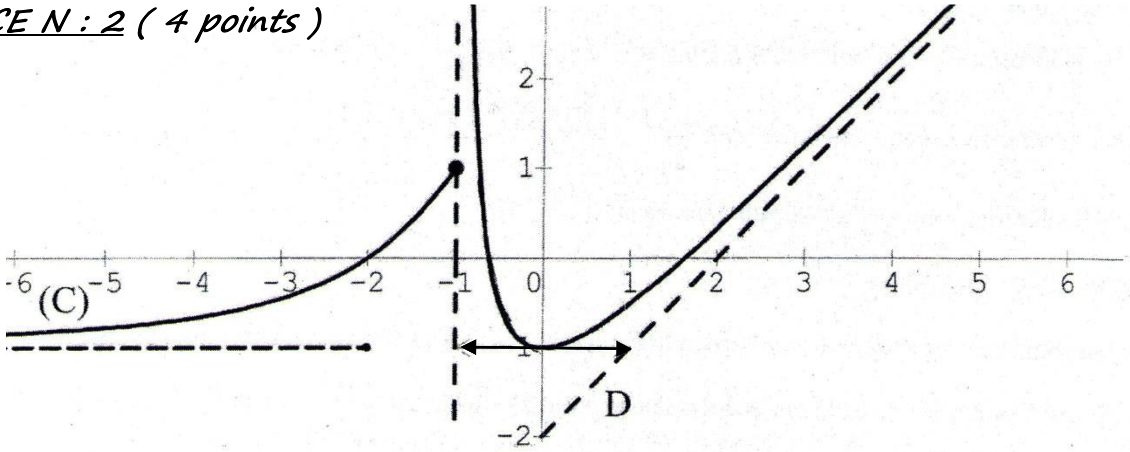
Lycée Houmet Souk Prof : Loukil Mohamed	Devoir de contrôle N : 1 Durée : 2 Heures	4 Technique 2 07 -11- 2018	Nom : Prénom :

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions ci-dessous cocher **la seule réponse correcte** .

$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$	☐ f est continue sur $]0,+\infty[$ ☐ f est continue sur $]-\infty,0[$ ☐ f est prolongeable par continuité en 0	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\sin(1-\sqrt{x})}$	☐ 0 ☐ 2 ☐ N'existe pas
$g(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$	☐ g est continue en 2 ☐ $\lim\limits_{x\to2} g(x)=0$ ☐ g est prolongeable par continuité en 2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+x+1}$	☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ N'existe pas
(Ch) admet une asymptote d'équation : $y=1-x$ au voisinage de $-\infty$ alors :	☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)+x]=1$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)+1-x]=0$	$k(x)=1-x^3$	☐ $k(]1,2[)=[-7,0[$ ☐ $k([1,+\infty[)=]-\infty,0[$ ☐ $k([0,1])=[0,1]$

EXERCICE N : 2 (4 points)



On a représenté ci-dessus la courbe représentative **(C)** de la fonction f définie sur IR .

A) Par lecture graphique , déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$; $f(IR)$ et $f\circ f(]-\infty;-1])$.

2) Montrer que l'équation : $f(x)=1+\dfrac{1}{2x}$ admet dans $[-2,-1]$ une unique solution α .

B) On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=x f(\frac{1}{x}) & \text{si } x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

On désigne par **(C g)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que g est continue à droite de 0 .

2) Prouver que $(g)'_d(0)=-2$.

3) Montrer que la droite $\Delta : y=-x$ est une asymptote oblique à **(C g)** .

EXERCICE N : 3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} - 3 & si \quad x < 1 \\ x^2 - 2 + x\sin(\frac{\pi}{x}) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

On désigne par (C f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+x]$. (Interpréter géométriquement les résultats obtenus)

2) a) Montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$; $x^2 - x - 2 \leq f(x)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (Interpréter géométriquement les résultats obtenus)

3) a) Montrer que f est dérivable à gauche de 1 .

b) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $[1; +\infty[$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$ et $x \in [1; +\infty[$.

d) f est elle dérivable en 1 ? justifier votre réponse .

4) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]1; 2[$.

EXERCICE N : 4 (7 points)

I) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation **(** E_θ **)** : $Z^2 - (2i\cos\theta)Z - 1 = 0$, où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On pose Z ' et Z '' les solutions de (E_θ) avec **Re (Z ') < 0** .

1) Sans chercher Z ' et Z '' déterminer la valeur de θ pour laquelle $\frac{i}{Z'} + \frac{i}{Z''} = 1$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

b) Ecrire Z ' et Z '' sous la forme exponentielle .

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On donne les points M , M' et M'' d'affixes respectives $Z_M = 2i\cos\theta$, $Z_{M'} = i\,e^{i\theta}$ et $Z_{M''} = i\,e^{-i\theta}$.

1) a) Déterminer et construire l'ensemble **(Γ)** des points M lorsque θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Construire l'ensemble **(Γ ')** des points M' lorsque θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

c) Prouver que M' et M'' sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{v})$.

2) Montrer que la distance MM' est constante pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3) a) Montrer que OM'MM'' est un losange .

b) Donner une mesure de $(\overrightarrow{OM''}, \overrightarrow{OM'})$ en fonction de θ .

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OM'MM'' soit un carré .