

<u>Lycée Houmet Souk</u>	<u>Devoir de Contrôle N : 1</u>	<u>4 Mathématique 1</u>
<u>Prof : Loukil Mohamed</u>	<u>Durée : 2 Heures</u>	<u>06 - 11 - 2018</u>

EXERCICE N : 1 (5 points)

A) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1, Z_B = 2$ et $Z_C = 3$.

Soit $f : P \setminus \{B\} \rightarrow P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ avec : $Z' = \frac{\bar{z}-3}{z-2}$.

1) a) Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points M tels que $|Z'| = 1$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble (Γ') des points M tels que Z' est imaginaire.

2) a) Vérifier que pour tout $Z \neq 2$ on a : $Z' - 1 = \frac{-1}{z-2}$.

b) En déduire que pour tout $M \neq B$, on a : $AM' \cdot BM = 1$ et $(\overline{BM}, \overline{AM'}) \equiv \pi (2\pi)$.

c) Construire le point M' lorsque M est un point du cercle (\mathcal{C}) de centre B et de rayon 1 .

3) Dans cette question le point M appartient au cercle (\mathcal{C}') de centre C et de rayon 1 .

a) Montrer qu'il existe un réel $\theta \in]-\pi ; \pi [$ tel que : $Z = 3 + e^{i\theta}$

b) Ecrire $Z' - 1$ sous forme exponentielle.

c) Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$.

d) Connaissant le point M , construire le point M' .

EXERCICE N : 2 (5 points)

I) Soit l'équation $(E_\theta) : z^2 - \frac{1}{2}(1+3i)e^{i\theta}z - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)^2 = 2 + \frac{3}{2}i$.

2) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) et $\theta \in \mathbb{R}$.

On donne les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = (1+i)e^{i\theta}$ et $Z_B = \frac{1}{2}(-1+i)e^{i\theta}$.

1) Donner la forme exponentielle de Z_A et Z_B .

2) Déterminer la nature du triangle OAB .

III) On désigne par (\mathcal{C}) le cercle de centre O et de rayon 1 et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit $f : (\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}$; $M_{(e^{i2\theta})} \mapsto f(M) = MA \times MB$

1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $e^{i2\theta} - 1 = 2i \sin \theta e^{i\theta}$.

2) a) Montrer que : $f(M) = |e^{i2\theta} - 1 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i)e^{i\theta}|$.

b) En déduire que : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + (-\frac{3}{2} + 2 \sin \theta)^2}$.

c) Déterminer les coordonnées des points de (\mathcal{C}) pour lesquels f atteint son minimum.

EXERCICE N : 3 (10 points)

I) Soit la fonction f définie sur $] - 1, 1 [$ par : $f(x) = - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $] - 1; 1 [$ sur \mathbb{R} .

c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}$.

2) a) Etudier les variations de la fonction ψ définie sur $] - 1; 1 [$ par : $\psi(x) = f(x) - x$.

b) Montrer que l'équation : $\psi(x) = 0$ admet dans $] - 1; 1 [$ une unique solution $\alpha \in] 0 ; 1 [$.

c) Déduire le signe de $\psi(x)$ pour tout $x \in] - 1; 1 [$.

II) Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $U_0 \in [0, \alpha]$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \in [0, \alpha]$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0, \alpha]$ on a : $f^{-1}(x) \geq x$.

b) Montrer alors que la suite (U_n) est monotone.

c) Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

3) Pour tout $x \in] - 1; 1 [$, on pose : $h(x) = f(\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)])$.

a) Montrer que pour tout $x \in] - 1; 1 [$ on a : $h(x) = - 1 + \cotan[\frac{\pi}{2}(x+1)]$.

b) Montrer que h admet une réciproque h^{-1} définie sur \mathbb{R} .

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi((x+1)^2 + 1)}$.

III) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\frac{1}{x}-1)$.

1) Montrer que H est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $H'(x) = 0$.

2) a) Calculer $h(-\frac{1}{2})$, $h(\frac{1}{2})$, $H(-1)$ et $H(1)$.

b) En déduire que pour tout $x \in] -\infty; 0 [$, $H(x) = 1$ et pour tout $x \in] 0; +\infty [$, $H(x) = - 1$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $V_n = \sum_{k=1}^n [h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k})]$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k+1}) = - 1$.

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n = - n - h^{-1}(-\frac{1}{n+1})$.

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

