

### Exercice n°1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, 1, -1)$  et  $C(-1, 0, 1)$  et le plan  $P : x - z + 3 = 0$ .

- 1) a) Montrer que les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  déterminent un plan  $Q$   
b) Donner une équation cartésienne du plan  $Q$
- 2) Montrer que les plans  $P$  et  $P' : 2x - y - z = 0$  sont sécants selon une droite  $\Delta$  dont on déterminera une représentation paramétrique.
- 3) a) Caractériser l'ensemble  $S$  d'équation :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$   
b) Montrer que  $S \cap P'$  est un cercle dont on précisera le centre  $\omega$  et le rayon  $r$ .

### Exercice n°2

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ .

- I) 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) a) Montrer que  $(C_f)$  admet deux asymptotes obliques d'équations respectives :  
 $\Delta : y = x$  et  $\Delta' : y = x + 1$   
b) Montrer que  $\omega(0; 1/2)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ .
- 3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ 
  - a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$ , admet une unique solution  $\alpha$  et que :  
 $\text{Log}2 < \alpha < 1$
  - c) Montrer que  $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$
  - d) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $\alpha$
  - e) Tracer  $T$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$ . (on prend  $\alpha = 0.8$ )
- II) On désigne par  $g^{-1}$  la fonction réciproque de  $g$  et  $(C')$  sa courbe représentative dans le repère  $R$ .
  - 1) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $(g^{-1})'(0)$  en fonction de  $\alpha$ .
  - 2) La courbe  $(C')$  coupe  $(xx')$  en un point  $I$ , écrire la tangente  $T'$  à  $(C')$  en  $I$ .
  - 3) Tracer  $(C')$  et  $T'$  dans le même repère  $R$ .

### Exercice N°3

I- Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$

1/ Justifier les résultats du tableau de variation de  $g$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2/ Déduire le signe de  $g(x)$

II- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$

1/a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  on a  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

2/a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à  $\zeta_f$

b) Étudier les positions relatives de  $\zeta_f$  et  $\Delta$

3/ Compléter  $\zeta_f$  et  $\Delta$  sur la feuille annexe

4/ Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur  $]0, 1]$

a) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $]0, 1]$  sur  $[1, +\infty[$

b) Construire  $\zeta_{h^{-1}}$  la courbe de la fonction réciproque de  $h$  dans le même repère que  $\zeta_f$

5/ Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1.