Proposée par Mr

FEHRI BECHIR

2018/2019

Série d'Intégrales

BAC SCIENCE

Exercice N°1 :

Soit f la fonction définie sur **R** \ $\{1\}$ par f(x) = $\frac{2x-1}{(x-1)^3}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o , $\vec{i}$, $\vec{j}$)

1/ Etudier f et tracer C .

2/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que f(x) = $\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$, pour tout x$\neq$ 1

3/ soit $\lambda < \frac{1}{2}$. o pose A(λ) l'aire des abscisses et les droites d'équations x= λ et x=$\frac{1}{2}$

a- Déterminer A(λ).

b- Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

Exercice N°2 :

1/ A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$ et $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

2/ En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$.

Exercice N°3 :

A / On considère la fonction f définie sur] 0, $\frac{\pi}{2}$ [par f(x) = $\frac{1}{sin^2 x}$.

1/ Montrer que f(x) = $\frac{1+tan^{2} x}{tan^{2} x}$, x $\in$]0, $\frac{\pi}{2}$[.

2 / Montrer que f réalise une bijection de] 0, $\frac{\pi}{2}$ [sur un intervalle I que l'on précisera .

3/ Montrer que la réciproque (f^{-1})(x) = - $\frac{1}{2\sqrt{x^3-t}}$, pour tout x de I .

4/ Calculer l'intégrale $\int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{dt}{2\sqrt{t^3-t}}$.

B/représenter dans un repère orthonormé (o ,$\vec{i}$,$\vec{j}$) , la fonction f définie sur R par f(x) = $\frac{x^2}{1+x^2}$

2/ soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2

a- Vérifier que $\frac{1}{2} \leq$ A$\leq$ 1.

b- Utiliser la méthode des rectangle , en partageant l'intervalle [1,2] en cinq intervalles d'amplitude 0.2 pour donner un nouvel encadrement de A .

"Le Premier règle de la réussite ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail "

C/ Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x^2+1)^2} dx$, $n \geq 1$

1/ Montrer que $0 \leq \frac{x^{2n+1}}{(x^2+1)^2} \leq x^{2n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout $0 \leq x \leq 1$

2/ en déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite

Exercice N°4 :

On pose pour tout n entier naturel non nul $j_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+xdx}$

1/ A l'aide d'un encadrement de $\sqrt{1+x}$ établir que $\frac{1}{n+1} \leq j_n \ll \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

En déduire la limite j_n

2/a- Montrer que pour tout x de [0.1] $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}(1-x)$

b- En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq j_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

c- Déterminer la limite de la suite (nj_n).

Exercice N°5 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x \, dx$, $n \geq 0$

1/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante

2/ Comparer u_n et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \, dx$, $n \geq 1$

3/ En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

4/a- Calculer u_0 et u_1

b-Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

c-Calculer u_2 et u_3.

Exercice N°6 :

Soit la suite I_n définie par $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx$.

1/ Calculer I_0 et I_1.

2/ Montrer que pour tout entier naturel n , $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$. En déduire les valeur de I_2 et I_3.

3/ On considère la suite(u_n) déduire pour tout entier naturel n par $u_n = (n+2) I_n I_{n+1}$.

a-Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que la suite (u_n) est constante.

b-Donner la valeur de u_n .

4/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

5/a- Déduire que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$, $n \geq 1$.

b-Donner un encadrement de I_{1000}

Exercice N°7 :

On pose pour tout n entier naturel n , $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx$.

1/a- Calculer I_0 .

b-Vérifier que pour tout n, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

c-En déduire que la suite (I_n) est convergente .Tapez une équation ici.

2/a- Montre que pour tout n , $I_n + I_{n+2} = \frac{1\pi}{n+3}$

b-En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$

Calculer I_2 et I_4.

Exercice N°8 :

I /On considère la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1/ Vérifier que f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et déterminer sa fonction dérivée .

2/ En déduire que pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$, f (x) =x

3/ Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

II/ On considère la suite (j_n) définie par $j_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $j_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$, $n \geq 1$

1/a- Vérifier que pour tout n, $0 \leq j_n \leq \frac{1}{1+2n}$.

b-En déduire $\lim_{n \to +\infty} j_n$.

2/a- Montrer j_k, pour tout entier naturel $0 \leq k \leq 6$.

Exercice N°9 :

On considère la fonction f définie sur $[0 ,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt$.

1/ Vérifier que f est dérivable sur $[0 ,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2/En déduire que pour tout $x \in [0 ,\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

3/Calculer $f(x) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$

4/ Etudier les variation de f

5/ Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(o ,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice N°10 :

On considère la fonction f définie sur [-2 ,2] par $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

1/ Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.

2/ Soit f la fonction définie sur $[0 ,\pi]$ et que $f(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\, dt$.

a- Montrer que f est dérivable sur $[0 ,\pi]$ et que $f'(x) = -4\sin^2 x$, $x \in [0 ,\pi]$.

b- Calculer $f(\frac{\pi}{2})$.

c- En déduire que pour tout $x \in [0 , \pi]$, $f(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$.

3/ Soit A l'aire de la partie du plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation , y= x , x = -2 et x= 2

a- Montrer que $A = f(0) - f(\pi)$.

b- Déduire A