

Exercice N°1 :

On considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit f la primitive de f sur $] -1, 1[$ qui s'annule en 0 et g la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

1/ Montrer que g est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ déterminer sa fonction dérivée .

2/ déduire que pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = x$

3/ Calculer $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice N°2 :

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Soit f la primitive de f sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0 , et g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Par $g(x) = f(\cos x)$.

1/ Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée .

2/ En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{\pi}{4}$

3/ Calculer $f(1)$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice N°3 :

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

1/a- Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2, 2]$

b- Soit f la primitive de f sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 0. Etudier la partie de f

2/ soit G la fonction définie sur $[0, \pi]$, par $G(x) = f(2\cos x)$ et C sa courbe représentative

dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

a- Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C .

b- Calculer $G'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0, \pi]$, $G(x) = \pi - 2x + \sin 2x$.

c- Calculer alors $f(1)$, $f(2)$ et $f(\sqrt{2})$

Exercice N°4 :

1/ Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = x \sin x + \cos x - 1$

a- Etudier les variations de g sur $[0, \pi]$.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α appartenant à $] \frac{2\pi}{3}, \pi[$

préciser le signe de $g(x)$.

2/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi[. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

a- Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

b- Vérifier que $f(\alpha) = \sin \alpha$

3/ On donne $\alpha \approx 2,34$ et $f(\alpha) = 0.72$ construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) .

4/ Dédire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha, \pi]$. Est une bijection de $[\alpha, \pi]$ sur intervalle I que l'on précisera .

5/ On pose $h(x) = g(x) - 2 \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

Montrer que h admet des primitives sur $[0, \pi]$.

Donner la primitive H de h sur $[0, \pi]$. Qui prend la valeur 1 en 0 .

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$

1/a- Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$.

b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0, \sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

2/ soit g la fonction définie sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par $g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

On note G la primitive de g sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ telle que $G(0) = 0$.

a- Calculer la dérivée de la fonction : $x \rightarrow G(x) + G(-x)$. En déduire que G est impaire

b- Montrer que pour tout x de $[0, \sqrt{2}[$, $G(x) = \pi - f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$

Exercice N°6 :

Soit f la fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]0, 1[$

1/ Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$

2/a- Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(\cos x) = \frac{2}{\pi} x$.

c- En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.

3/ On pose pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) = f(\cos x) + f(\sin x)$.

a- Montre que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.

b- En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) = 1$

4/ Pour tout n de \mathbf{N}^* on pose $\varphi_n(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) - x^n$, $x \in [0, 1]$.

a- Montrer que pour tout n de \mathbf{N}^* , il existe un unique réel $a_n \in]0, 1[$ tel que $\varphi_n(a_n) = 0$

b- Montrer que pour tout x de $]0, 1[$, si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.

b- En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.