L-S :E-Elhaythem | Devoir de contrôle N°1 | Prof : D – Ali

A-S : 2018 / 2019 | Durée : 2h | *** Mathématiques *** | coef : 4 | Niveau : 4 M

Exercice N°1 : 04 pts

On a représenter dans la (figur 1) , dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) , les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g définies et dérivables sur IR.

On sait que :

- La droite des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
- La droite D est une asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$.
- C_f et C_g admettent au voisinage de $+\infty$ deux branches infinies de direction $(O,\vec{j})$.

1) Par lecture graphique déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=f(x)-g(x)$.

On désigne par C_h sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ Déterminer le nombre des points d'intersection de C_h avec l'axe des abscisses.

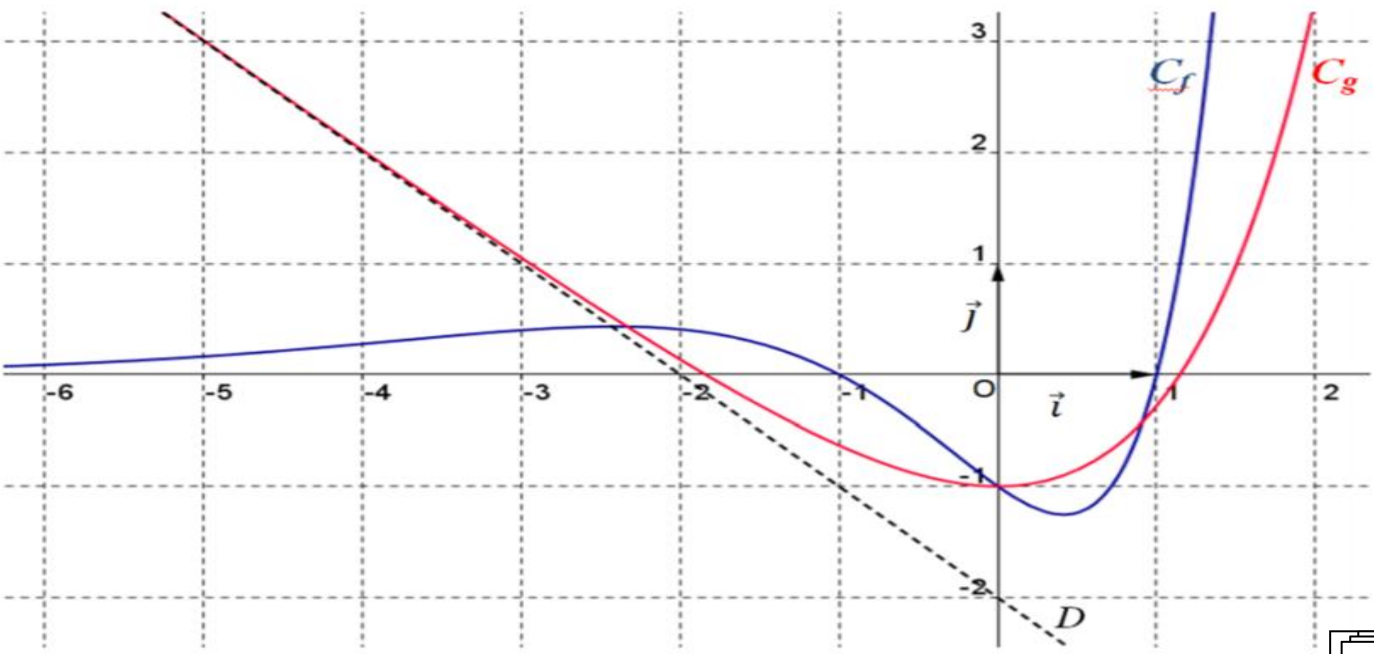
b/ Soit M un point de C_f d'abscisse x, la parallèle à $(O,\vec{j})$ passant par M coupe C_g en N.

On pose : $MN=\varphi(x)$, exprimer $\varphi(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.

c/ Construire les points de C_h d'abscisses (-1), (-3) et 0.

d/ Montrer que la droite d'équation : $y=x+2$ est une asymptote de C_h au voisinage de $-\infty$.

figur 1



Exercice N°2 : 05 pts

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n}$

1°) a) Montrer que pour tout entier n on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que (U_n) est croissante.

2°) a) Montrer que (U_n) n'est pas majorée

b) Déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3°) Pour tout n∈ IN ; on pose $V_n = \frac{U_n^2}{4}$

Montrer que pour tout entier n ; $V_n \geq n$ puis déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$.

4°) Pour tout n∈ IN^* ; on pose $W_n = V_{n+1} - V_n$

a) Montrer que Pour tout n∈ IN ; $1 \leq W_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$
b) Montrer que (W_n) est convergente et donner sa limite .

Exercice N°3 : 05pts

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$

1°) a- Montrer que l'equation (E) : f(z)=0 admet une racine imaginaire pur z_0 .

b- Resoudre dans l'ensemble C l'equation (E) . on notera z_1 la racine qui a la partie imaginaire negative et z_2 l'autre solution .

2°) Determiner l'ensemble des points M d'affixe z telque : $\frac{|f(z)|}{|z^2-2\sqrt{3}\,z+4|} = 2$

3°) on pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$

a- Donner la forme exponentielle de ω .
b- Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. a tout nombre Complexe z on lui associe les points M ; M_1 et M_2 d'affixe respectives : z ; ωz et $\omega^2 z$. Montrer que OMM_1M_2 est un losange .

Exercice N°4 : 06pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1}\ldots si\ x\geq 0\\ \dfrac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)}\ldots si\ x\prec 0\end{cases}$

On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$ on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1}\leq f(x)\leq\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\dfrac{1}{2}x$ puis interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

5) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

b) Montrer que $\tan(\alpha)=-\sqrt{\alpha-1}$.

6) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Bon Travail