SERIE D'EXERCICES — 3eme TEC

LIMITES

Exercice n°1 :

Calculer les limites éventuelles des fonctions f ; g et h en : 2 ; -1 ; $+\infty$ et $-\infty$.

$f(x)=x^3+2x^2-1$; $g(x)=\dfrac{3-2x}{x-2}$ et $h(x)=\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$.

Exercice n°2 :

Déterminer, si elle existe, la limite de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

a- $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, $x_0=1$, $x_0=2$

b- $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-4}$, $x_0=4$

c- $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$, $x_0=2$

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x-3}{x+3} & si \quad x\in\,]-\infty\,;\,1[\\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x} & si \quad x\in[1\,;\,+\infty[\end{cases}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) Calculer les limites éventuelles de la fonction f a droite en 1 et a gauche en 1

Que peut-on conclure ?

3) Calculer les limites éventuelles de la fonction f en 0 et en 5.

4) Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty;-3[$; $f(x)=2-\dfrac{9}{x+3}$ et déduire alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice n°4 :

Soit les fonctions : $f:x\mapsto\dfrac{1-x^2}{x^2+x}$ et $g:x\mapsto\sqrt{x^2-x}$

1) Déterminer Df et Dg les domaines de définition de f et g.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]$

Exercice n°5 :

°) Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

b) Montrer que pour tout x∈IR\{ -1 , 1} on a $f(x)=\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$.

c) Déduire $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

2°)Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-5x+6}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}+1}{x^2+5x+4}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

Exercice n°6:

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Calculer les limites de f en $(-1)^-$ et $(-1)^+$.

3- Calculer les limites de f en $-\infty, 1^-, 1^+ \, et + \infty$.

I/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

1/ a)Vérifier que pour tout réel x on a : $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

b) Préciser l'ensemble de définition de f .

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et étudier $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

II/ Soit la fonction g définie par $\begin{cases} g(x)=f(x) & si \;\; x \leq -2 \\ g(x)=ax+b & si \;\; -2 < x \leq 2. \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & si \;\; x > 2 \end{cases}$

1/ Préciser l'ensemble de définition de g et Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

2/ Montrer que pour tout $x \in \left]2,+\infty\right[$ $on \; a \; g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$.

3/ Déterminer a et b pour que g soit continue en 2 et - 2 .

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

Exercice n°7:

1/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x+1+\sqrt{x^2+x+2}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\infty, 0\right[$ on a : $f(x) = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

2/ Soit g la fonction définie sur IR par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x+1-\sqrt{x^2+x+2}} & si \;\; x \neq 1 \\ g(1)=k & (k \; est \; un \; réel) \end{cases}$

a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \neq 1$ on $g(x) = (ax+b)f(x)$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

Exercice n°8 :

Soit g la fonction définie par : g(x)= $\sqrt{x^2-9}$

a) Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{|x|\to +\infty} \dfrac{1}{g(x)}$ et $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{g(x)}$

b) Montrer que g(x)-x= $\dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)-x$

c) Montrer que g(x)+2x= $x(-\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}+2)$ puis déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)+2x$

d) Peut on parler de la limite en 0 de g justifier votre réponse.

Serie d'exercices : Limites 3ème Année Technique

Corrigés

Exercice n° 1.

- $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^3 + 2x^2 - 1) = f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 1 = \underline{15}$
- $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^3 + 2x - 1) = f(-1) = -1 + 2 - 1 = \underline{0}$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = \underline{+\infty}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = \underline{-\infty}$
- $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3-2x}{x-2} = \frac{3-4}{0} = -\frac{1}{0} = \underline{-\infty}$.
- $\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} \frac{3-2x}{x-2} = \frac{3+2}{-1-2} = -\frac{5}{3} = \underline{g(-1)}$
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3-2x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{3}{x} - 2\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = -\frac{2}{1} = \underline{-2}$
- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x} = \underline{-2}$
- $\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0}$: F. I

or $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

d'où $\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+1} = \underline{\frac{1}{3}}$

- $\lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x^2 - x - 2} = \frac{-1-2}{1+1-2} = -\frac{3}{0} = \underline{-\infty}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$

Exercice n° 2

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \dfrac{0}{0}$ F.I

or $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 2) = -1$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x - 4}$

- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x - 2}{x - 4} = \dfrac{10}{0} = +\infty$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} = \dfrac{0}{0}$: F.I

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(\sqrt{x + 2} - 2\right)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)}{(x - 2)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2) - 4}{D}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x - 2)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x + 2} + 2} = \dfrac{1}{4}$

corrigés

Exercice n° 3.

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+3} \quad si \quad x \in]-\infty, 1[$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} \quad si \quad x \in [1, +\infty[$$

1°) Domaine de définition de f

on a $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+3}$; $x \in]-\infty, 1[$

or il faut que $x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$

donc $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+3}$ si $x \in]-\infty, -3[\cup]-3, 1[$

Pour $x \in [1, +\infty[$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ est défini

d'où ~~$D_f =]-\infty$~~

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+3} \quad si \quad x \in]-\infty, -3[\cup]-3, 1[$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} \quad si \quad x \in [1, +\infty[$$

2°) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x-3}{x+3} = -\dfrac{1}{4}$

on a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

donc f n'est pas continue en $x = 1$.

3°) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-3}{x+3} = -1$

- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} = \dfrac{2}{5}$

4°) Pour tout $x \in]-\infty, -3[$

on a $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+3} = \dfrac{2(x+3)-9}{x+3}$

$= 2 - \dfrac{9}{x+3}$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 - \dfrac{9}{x+3}\right) = 2$

Exercice n° 4

- $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

1°) f est définie si $x^2 + x \neq 0 \rightarrow x(x+1) \neq 0$

sig $x \neq 0$ ou $x \neq -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ est définie si $x^2 - x \geq 0$

sig $x(x-1) \geq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_g =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

2°) $\lim_{x \to -1}$ ~~lim~~ $f(x) = \lim_{x \to -1} \dfrac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \dfrac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)}$

$= \lim_{x \to -1} \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{2}{-1} = -2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x^2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x}{x} = -\infty$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

or $x>0$ donc $|x| = x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = \infty-\infty$ FI

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}$

et comme $x>0$ alors $|x| = x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x)-x\right] = -\dfrac{1}{2}$

Exercice n° 5

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$$

Pour que f soit définie, il faut que

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ |x| \neq 1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x^2-1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)$

$= \frac{\sqrt{2}-2}{0} = -\infty$

b) on a $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$\rightarrow f(x)=\frac{(x+3)-4}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; $f(x)=\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{1}{8}$

2°/ $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0}$: F.I

or $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)(x-2)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+6)-9}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}+1}{x^2+5x+4} = \frac{\sqrt{4}+1}{0} = \frac{3}{0} = +\infty$

. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{\sqrt{9}-3}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{0}$ F.I

donc : $\lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+7-9)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Exercice n° 6

I. soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°/ Domaine de définition de f

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

car $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \quad x \neq 1$ où $x \neq -1$.

2°/ $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{-2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

3°) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ on a une F.I

or $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

d'ou $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right) = -\sqrt{2}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right)$: FI $(\infty - \infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)-(x+1)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} = -\frac{2}{\infty}$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

II - soit $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

1° a) $(x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2$

$= x^2 - 3x + 2$ vérifié

b) f est définie si et seulement si $(x-1)(x-2) \neq 0$

$x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

ou

$x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1, 2\} =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

2°/ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{4}{1} = 4$

• $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{3}{0} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

III- g : fonction définie par :

$g(x) = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ si $x \leq -2$

$g(x) = ax+b$ si $-2 < x \leq 2$

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ si $x > 2$

1°) Domaine de définition de f

$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

2°/ Pour tout $x \in]2, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}+1)(x-2)} = \frac{(x-1)-1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$g(x) = \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

3°/

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-4}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{x-1} = 0$$

- $$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} ax+b = -2a+b$$

Pour que g soit continue en -2, il faut que

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^+} g(x)$$

$$\rightarrow \quad -2a+b = 0 \quad (1)$$

- $$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax+b) = 2a+b.$$

- $$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \frac{1}{2}$$

donc pour que g soit continue en 2, il faut que

$$2a+b = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$(1)+(2)$: $$(-2a+b) + 2a+b = 0+\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2b = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{4} \text{ et donc } a = \frac{b}{2}$$

$$a = \frac{1}{8}$$

4°/ $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Exercice n° 7

1°/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+1+\sqrt{x^2+x+2}$$

a) : $x \in \left]-\infty, 0\right[\rightarrow x < 0$

Ecrivons : $$f(x) = \frac{\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)\left(x+1-\sqrt{x^2+x+2}\right)}{(x+1)-\sqrt{x^2+x+2}}$$

soit $$f(x) = \frac{(x+1)^2-(x^2+x+2)}{(x+1)-\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x^2+2x+1-x^2-x-2}{(x+1)-\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x-1}{(x+1)-\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$, car $\sqrt{x^2} = |x|$

et comme $x < 0$ alors $|x| = -x$

d'où $$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left[1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right]}$$

d'où pour tout $x < 0$, $$f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x+1+\sqrt{x^2+x+2} \right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x \left[1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} \right] = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} \right) = 2$

• $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1+\sqrt{x^2+x+2}-4}{(x-1)}$

car $f(1) = 1+1+\sqrt{1+1+2} = 2+2 = 4$

• $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-3+\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)-2+\sqrt{x^2+x+2}}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \left[1+\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{(x-1)} \right]$

$= \lim\limits_{x \to 1} \left[1+\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} \right]$

$= \lim\limits_{x \to 1} \left[1+\frac{(x^2+x+2)-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \left[1+\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} \right]$

$= \lim\limits_{x \to 1} \left[1+\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+2} \right] = 1+\frac{3}{2+2} = \frac{7}{4}$

• $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{7}{4}$

2°) on a
$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x+1-\sqrt{x^2+x+2}} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = k \quad , \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) a et b deux reéls : $g(x) = (ax+b)\,f(x)$

on $g(x) = \dfrac{(2x^2-5x+3)\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)}{\left[(x+1)-\sqrt{x^2+x+2}\right]\left[(x+1)+\sqrt{x^2+x+2}\right]}$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{(2x^2-5x+3)\left((x+1)+\sqrt{x^2+x+2}\right)}{(x+1)^2-(x^2+x+2)}$

on $(x+1)^2-(x^2+x+2) = x^2+2x+1-x^2-x-2 = x-1$

alors $g(x) = \dfrac{(2x^2-5x+3)}{(x-1)} \cdot f(x)$

on pose $u(x) = 2x^2+5x+3$.

$u(1) = 0$ donc $u(x) = (x-1)(\alpha x+\beta)$.

$\Rightarrow \alpha x^2+\beta x-\alpha x-\beta = 2x^2-5x+3$

d'où $\alpha = 2$; $\beta-\alpha = -5 \Rightarrow \beta = -5+2 = -3$

$2x^2-5x+3 = (x-1)(2x-3)$

d'où $g(x) = \dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)} \cdot f(x)$

$g(x) = (2x-3) \cdot f(x)$

donc $a = 2$ et $b = -3$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-3) \times \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-3) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice n° 8

soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to +\infty} |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}$

or $x > 0$ donc $|x| = x$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}$

or $x < 0$; donc $|x| = -x$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{1}{|x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

c) $g(x) + 2x = \sqrt{x^2 - 9} + 2x$

$g(x) + 2x = \cancel{2x} \sqrt{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} + 2x$

$= |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + 2x$

si $x < 0$ alors $|x| = -x$

et donc $g(x) + 2x = -x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + 2x$

soit : $g(x) + 2x = x\left(-\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + 2\right)$; $x < 0$

• $\lim_{x \to -\infty} \left(g(x) + 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} x\left(-\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + 2\right) = -\infty.$

b) $g(x) - x = \sqrt{x^2 - 9} - x$

$$g(x) - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 9} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 9} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 9} + x}$$

$$g(x) - x = \frac{(x^2 - 9) - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x}$$

• $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} + x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{|x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + x}$ or $x > 0$ donc $|x| = x$

d'où $\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{x\left(\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + 1\right)} = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - x\right] = 0$

d) la limite en 0 de g n'existe pas car $g(x)$ est définie si $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow$ ~~x^2~~ $|x| \geq 3$

$x \geq 3$ et $x \leq -3$ et par suite $0 \notin D_f$