Exercice1 :

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \sqrt{4+3U_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \le U_n < 4$.

2.a. Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b. En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3.a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $4-U_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-U_n)$.

b. En déduire que pour tout $n \in IN$, $4-U_n \le 4.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice2 :

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < u_n < 2$.

b. Etudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire que (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2.a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $2-u_{n+1} < \frac{1}{2}(2-u_n)$.

b. En déduire que pour tout $n \in IN$, $2-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{3.2^n}\right)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice3:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+4U_n^2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < U_n \le \frac{1}{2}$.

2.a. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3. Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{1}{4U_n^2}$.

a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice4 :

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 3}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in IN$, $2 \le u_n < 3$.

2. Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que (u_n) est convergente et trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3.a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \le 3-u_{n+1} \le \frac{2}{3}(3-u_n)$.

b. En déduire que pour tout $n \in IN$, $0 \le 3-u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. Pour tout $n \in IN^*$, on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$.

a. Vérifier que pour tout $k \in IN^*$, $u_{k+1} - u_k = \frac{3}{u_k} - 1$.

b. En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{2n-1}{6} \le s_n \le \frac{2n+1}{6}$.

c. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{s_n}{n}$.

Exercice5:

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n^2+3}{U_n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \le U_n < 3$.
2.a. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3.a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}(3 - U_n)$ et en déduire que $3 - U_{n+1} \le \dfrac{3}{4}(3 - U_n)$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - U_n \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice6:

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 3}{U_n}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \ge 3$.
b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
c. En déduire que (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 3 \le \dfrac{1}{3}(U_n - 3)$.

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 3 \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice7 :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{2U_n}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$.
b. Etudier la monotonie de la suite (U_n). En déduire que (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 2 \le \dfrac{1}{2}(U_n - 2)$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 2 \le 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n < S_n \le 2n + 3\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

b. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice8:

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + 2u_n}}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \le 1$.
b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice9 :

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1, \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 0$

2.a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
b. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas majorée.
c. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k + 2}$.

a. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_k + 2} = \dfrac{1}{u_k + 1} - \dfrac{1}{u_{k+1} + 1}$.

b. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1 - \dfrac{1}{u_{n+1}+1}$ puis calculer la limite de la suite (s_n).

Exercice10:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

1.a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \le n+3$.
b. Etudier la monotonie de la suite (U_n).
2. On considère la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = U_n - n$.

a. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice11 :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \le 1$.
b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \dfrac{1}{U_n^2}$.

a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.
b. Exprimer V_n en fonction de n.

c. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \ge \sqrt{n}$.

b. La suite (s_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. Soient les deux suites définies par : $a_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

b. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

c. Déduire alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{2\sqrt{n}}$.

Exercice12 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{1}{2} - \sqrt{u_{n+1}}$.

2. Soit la suite réelle (v_n) définie sur IN par : $v_0 = \sqrt{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\sqrt{1+u_n v_n^2}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}^2} = \dfrac{1}{v_n^2} + u_n$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{v_n^2} = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

d. Exprimer v_n en fonction de u_n puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice13 :

Soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n = \frac{n+1}{4^n}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

b. En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Soit la suite (S_n) définie sur IN par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b. Montrer que pour tout $n \in IN$, $S_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice14:

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $n \in IN$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorées par 2.

2.a. Vérifier que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

b. Montrer alors, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $u_n \geq v_n$.

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

3.a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leq \frac{1}{2}$.

b. En déduire que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.

c. Montrer alors que pour tout $n \in IN$, $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. On admet que pour tout $n \in IN$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice15:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 \leq U_n \leq 1$.

b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c. Déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.

d. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $U_n = \frac{1}{n+1}$.

2. Soit la suite (S_n) définie sur IN par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k U_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout $n \in IN$, on pose $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$.

a. Montrer que pour tout $n \in IN$, $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}$ puis déduire que le suite (V_n) est décroissante.

b. Montrer que la suite (W_n) est croissante.

c. Montrer que pour tout $n \in IN$, $W_n \leq V_n$.

d. Déduire que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes.

e. Déduire que la suite (S_n) converge vers un réel a tel que $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Exercice16 :

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Soit la suite (w_n) définie sur IN par : $w_n = u_n - v_n$.

Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

2. Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n \leq v_n$.

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergente vers une même limite.

5. On considère la suite (t_n) définie sur IN par : $t_n = 3u_n + v_n$.

a. Montrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exerice17 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 1, b_0 = 7$ et pour tout $n \in$ IN, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$.

Pour tout $n \in$ IN, on pose $u_n = b_n - a_n$.

1.a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Exprimer, alors u_n en fonction de n, et calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

2. Soit (S_n) la suite définie sur IN par $S_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k)$.

Vérifier que pour tout $n \in$ IN, $S_n = 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ puis calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

3.a. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $a_n \leq b_n$.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = a_n + b_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite constante.

b. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite commune.

Exercice18 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $u_0 = 2$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $n \in$ IN.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorées par 2.

2.a. Vérifier que pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

b. Montrer alors, par récurrence, que pour tout $n \in$ IN, $u_n \geq v_n$.

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

3.a. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leq \frac{1}{2}$.

b. En déduire que pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$.

c. Montrer alors que pour tout $n \in$ IN, $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. On admet que pour tout $n \in$ IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice19 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.

Pour tout $n \in$ IN, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $2 \leq v_n \leq 3$.

2.a. Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

b. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{2v_n + 1}$ et $w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{2w_n + 1}$.

c. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $v_n \leq w_n$.

3. Montrer par récurrence que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

4.a. Montrer que pour tout $n \in$ IN, $w_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{25}(w_n - v_n)$.

b. Déduire que pour tout $n \in$ IN, $w_n - v_n \leq \frac{1}{2 \times 25^n}$.

5.a. Justifier que les deux suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b. Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.