N°1 :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^4}{x^2+x-2}$; $\lim\limits_{-\infty}\frac{1+\sqrt{x^2+3x-1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{x-|x-1|}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}+x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(4x)}}{\sin(3x)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Exercice N°2 :

Dans chacun des cas suivant ,étudier la limite de la fonction f.

1/ $f:x\mapsto\cos\left(\frac{\pi x+1}{x}\right)$ en $-\infty$. 2/ $f:x\mapsto\sin\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.

3/ $f:x\mapsto\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ en 0^+. 4/ $f:x\mapsto\frac{\cos(x^2-1)-1}{x^4-2x^2+1}$ en 1.

Exercice N°3 :

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR \{0}:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Déterminer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(\frac{1+x^4}{x+1}\right)$.

Exercice N°4:

Soit la fonction f définie sur IR par
$$\begin{cases} f(x)=\frac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}} & \text{si } x<1\\ f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x>1\\ f(1)=0 \end{cases}$$

1-Calculer $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.*f est-elle continue en 1 ?*

Interpréter graphiquement ce résultat .

2- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3) Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x+1}{1-2x}\right)$.

$F.I:\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{"0"}$; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$

$\frac{l}{\infty}=0$; $\frac{l}{"0"}=\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\forall x\in D;\ f(x)\geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$

$\forall x\in D;\ f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$ **alors** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

$\forall x\in D;\ h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

$\forall x\in D;\ |f(x)-l|\leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ **alors** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

Soit f une fonction <u>continue</u> en tout point d'un intervalle ouvert I, sauf peut-être en a de I. si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ ***alors f est prolongeable par continuité en a et sont prolongement est donnée par la fonction g définie sur I, continue en a et vérifiant :*** $\forall x\in I/\{a\}$; $g(x)=f(x)$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\\ \lim\limits_{x\to l}g(x)=l'\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}gof(x)=l'$; $\begin{cases}\text{si f est continue en a}\\ \text{et g est continue en f(a)}\end{cases}\Rightarrow gof$ est continue en a

$\begin{cases}\text{si f est continue sur I}\\ \text{et g est continue sur f(I)}\end{cases}\Rightarrow gof$ est continue sur I

Si f est une fonction <u>continue et strictement</u> <u>monotone</u> sur un intervalle [a, b] etvérifiant f(a).f(b) < 0 alors il existe un réel <u>unique</u> c appartenant à l'intervalle ouvert]a, b[tel que f(c) = 0.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\Delta:y=a$ *est une asymptote horizontale à Cf au v(¥)*

$\lim\limits_{x\to a^{+-}}f(x)=\infty\Leftrightarrow\Delta:x=a$ *est une asymptote verticale à Cf .*

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

$\Rightarrow$ *Cf admet au* $v(\infty)$ *,une B.P.I de direction celle de* $(O,\vec{i})$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$

Cf admet au $v(\infty)$ *,une B.P.I de direction celle de* $(O,\vec{j})$

L'image d'un intervalle fermé borné [a,b], par une fonction continue , est un intervalle fermé borné [m,M]
****Le rél m est le minimum de f sur [a,b].***
****Le rél M est le maximum de f sur [a,b].***

Exercice N°5 :

$f:[0,1]\to IR$ *une fonction numérique continue et définie sur* $[0,1]$

.on suppose que f(0) = f(1) = 0 et que pour tout x de $\left[0,\frac{7}{10}\right]$:

$f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$.

1-Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au mois sept solution sur $[0,1]$.

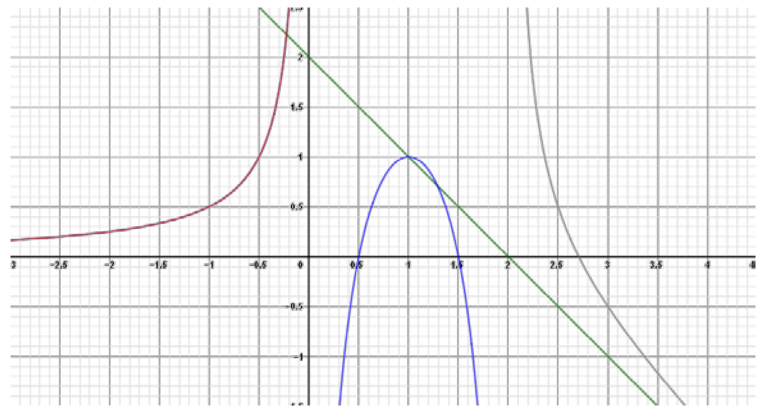
2-Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses.

Exercice N°6:

La courbe ci-dessous est la représentation graphique ,dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur $IR/\{0,2\}$ *et vérifiant.*

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$.

1/Déterminer graphiquement :



a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\frac{2}{x}\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{f(x)+x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\left[f(x)\cos\left(\frac{1}{f(x)}\right)-f(x)\right]$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\frac{3^n+1}{4^n+5}\right)$

2-a)Montrer que fof est continue sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

b)Etudier les variations de fof sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

c)Déduire que l'équation $fof(x)=0$ *admet une seule solution dans* $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

d)Interpréter le résultat précédent .

Exercice N°7 :

*Soit la fonction f définie sur * IR par*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1+\sqrt{|x^2-1|}}{x} & \text{si } x<1 \text{ et } x\neq 0 \\ f(x)=(a-1)\sqrt{x^2+x-1} & \text{si } 1\le x\le 2 \\ f(x)=x(2+\cos(\pi x)) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

1-Peut-on prolonger *f* par continuité en 0 ?

2-a)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b)Montrer que si $x\ge 2$ on a : $x-2\le f(x)\le 3x-2$ .En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3-a)Déterminer a pour que *f* soit continue en 1.

b)Pour la valeur de a obtenue, étudier la continuité de *f* en 2.

Exercice N°8 :

Soit *f* la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$.

1-Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-a)Montrer que pour tout x >0 ; $0\le f(x)\le 2x$.

b)En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

3-a)Montrer que *f* est continue sur $]0,+\infty[$.

b)Montrer que *f* est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

c)Montrer que l'équation f(x) = 1 admet dans $]1,2[$, une unique solution α.

Exercice N°9:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{2x^2-x^3} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

1)Montrer que *f* est continue sur IR.

2) Soit la fonction *f* définie sur IR par $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1.Définir ce prolongement.

Exercice N°10 :

Soit *f* la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{2x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-1 & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1-a)Montrer que pour tout réel x > 0 ; $f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{x}}\,\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}-1$

b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2-a) Montrer que pour tout réel x > 0 ; $-1-\sqrt{2x}\le f(x)\le -1+\sqrt{2x}$

b)Montrer que *f* est continue sur $[0,+\infty[$.

3-a)Montrer que *f* est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right]$.

b)Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right[$

Exercice N°11 :

Soit la fonction *f* définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=x-\dfrac{1}{2}\sin x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

1-Montrer que *f* est continue en 0.

2-a)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b)Trouver un encadrement de f(x) pour x > 0.

c)Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice N°12:

Soit les fonctions $f: x\mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g: x\mapsto\sqrt{x+1}$.

1-a) Calculer f o g (3) ; g o f (-2).

b) Définir chacune des fonctions f o g (x) et g o f (x).

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} gof(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} gof(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} fog(x)$.

Exercice N°13 :

Soit la fonction *f* définie par $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+6x}-x & \text{si } x<2 \\ f(x)=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x+7}-\sin\dfrac{\pi}{4}x\right) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

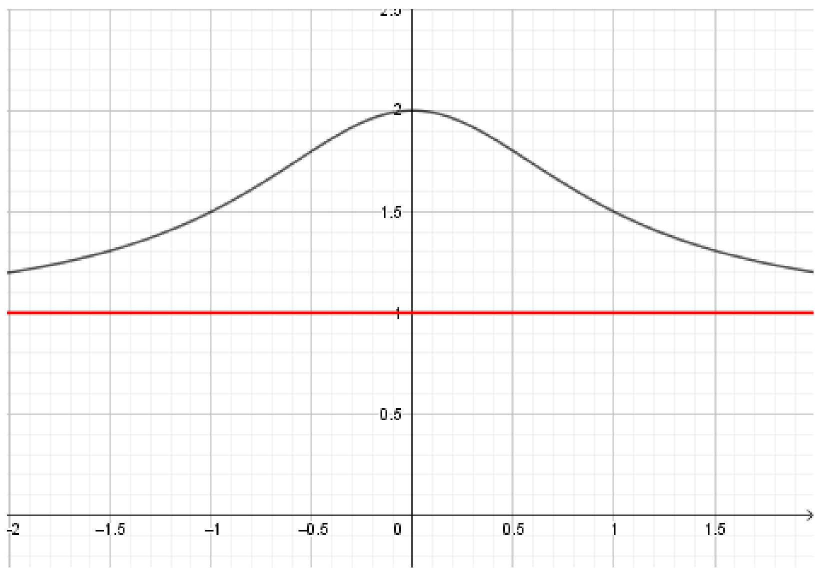
1-a)Préciser l'ensemble de définition D de *f* et montrer que *f* est continue en tout point de D.

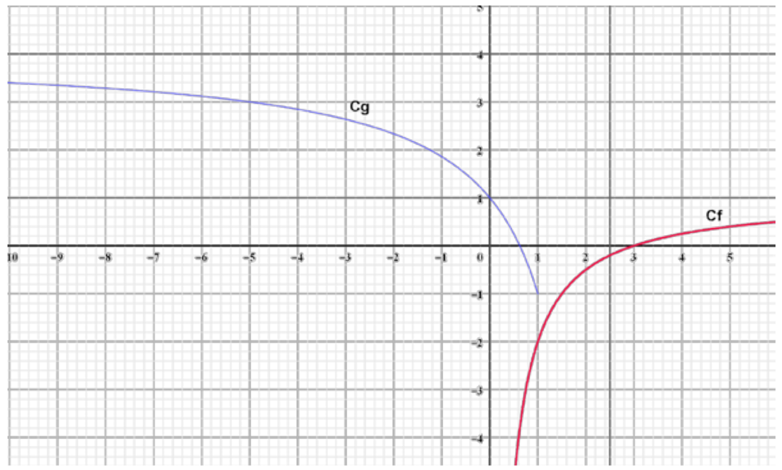
b)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2-On pose $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{3}{\cos x}\right)+\dfrac{6}{\cos x} & \text{si } x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right] \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-3 \end{cases}$

a)A l'aide du théorème de la composée, montrer que g est continue sur





$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

b)Vérifier que pour tout réel x , de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

$g(x)=\dfrac{-6}{1+\sqrt{1+2\cos x}}$

Exercice N°14:

Dans le graphique ci-dessous :

-C_f est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur $]0,+\infty[$.

-La droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.

--La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à Cf .

-Cg est la courbe représentative d'une fonction g définie sur $]-\infty,1]$

-La droite d'équation y = 4 est une asymptote horizontale à C_g au voisinage de $-\infty$.

1-Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et le sens de variation de *f*.

2-Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *et le sens de variation de g.*

3-Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par* $\begin{cases} h(x) = gof(x) & si \quad x \in]0,+\infty[\\ h(0) = 4 \end{cases}$

a)Déterminer h(1) , h(2) , h (3) et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

b)Montrer que h est continue sur $[0,+\infty[$.

c)Montrer que h est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

d)Tracer, dans un repère orthonormé, une allure de la courbe représentative C_h de h et préciser son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Exercice N°15:

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & si \quad x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1-Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2-a)Montrer que $\forall x < 1$; $\dfrac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$.

b)En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3-Montrer que f est continue sur IR.

4-a)Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α *dans* $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$.

b)En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$.

5-Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *par* $\begin{cases} g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & si \quad x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$