

Exercice1 :

Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 3x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 2 + x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + x} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

Exercice2 :

Les questions de cet exercices sont indépendantes :

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \left(\frac{\pi}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \tan \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sin(1-3x)}{1-3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{(x-1)^2}$$

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$. En déduire $\lim_0 f$.3. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^2 - 2 \sin x$.Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq x^2 - 2$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.4. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}$.Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) \geq -\frac{1}{x^2} + 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.**Exercice3 :**Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Justifier que f est continue sur \mathbb{R} .3.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.b. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$. Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.4.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1, 0]$.**Exercice4:**Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.3.a. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x}$.b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une moins une solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$.5. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.**Exercice5 :**Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x \cos x}{x^2+1} - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0.

2.a. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on a : $\frac{x}{x^2+1} - 1 \leq f(x) \leq \frac{-x}{x^2+1} - 1$.

b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3.a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2+1)$.

Exercice6:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9}+5 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1.a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\frac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose : $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b. La fonction f est-elle continue en 0 ?

3. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction h définie et continue sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h \circ f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h \circ f(x)$.

Exercice7 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x + \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1.a. Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$.

b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2.a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b. Etudier la continuité de f en 0.

3.a. Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

c. En déduire que l'équation $2f(x) - 7 = 0$ admet une unique solution α dans $[0, 2]$.

Exercice8 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1.a. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\frac{-x^2}{1+x} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{1+x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

3. Soit h la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $h(x) = f(-\sqrt{x+1})$.

a. Montrer que h est continue sur $] -1, +\infty[$.

b. Montrer que l'équation $h(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solutions dans $]0, 1[$.