Exercice 1 😊

Dans le plan complexe P muni d'un repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) on considère les points A et B d'affixe respectives a et 1

Ou a est un nombre complexe différent de 1 . soit la fonction f : P \ { B } $\longrightarrow$ P

$M_z \longrightarrow M'_{z'}$

Telle que $z' = \dfrac{z-a}{z-1}$

] – 1°) Montrer que les affixes des points invariant par f sont les solutions de l'équation

(E) : $z^2 - 2z + a = 0$

2°) On suppose que : $a = 1 - e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} [$.

a) Résoudre l'équation (E) .
b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle .

3°) on note M' et M'' les points d'affixes respectives $(1 + e^{i\theta})$ et $(1 - e^{i\theta})$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} [$ le triangle OM'M'' est rectangle en O .
b) Déterminer θ pour que le triangle OM'M'' soit isocèle.

][- on pose a = (-1)

1°) Montrer que : $(z' - 1)(z - 1) = 2$

2°) a°) Montrer que : $(\vec{u} ; \overrightarrow{BM}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 \, [2\pi]$

b°) Déduire que [B A) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BM'})$.

Exercice 2 😊

Pour tout réel $\theta \in]0,\pi[$ on considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1) a) Montrer que : $1 + 2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2) On donne $f(z)=z^3-4z^2+\left(4-2i\sin\theta e^{i\theta}\right)z+4i\sin\theta e^{i\theta}$

a) Calculer $f(2)$

b) Montrer que $f(z)=(z-2)\left(z^2+bz+c\right)$ ou b et c deux nombres complexes à déterminer.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.On désigne par A, B, et C les points d'affixes $2, 1-e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$

a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C

b) Montrer que OABC est un rectangle

c) Déterminer θ pour que $OABC$ soit un carré

Exercice 3 ☺

A/1) a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{2}\,i$ et $z_D=2\sqrt{2}\,i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_C=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) Vérifier que $z_B=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC)\perp(AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes respectives $z_M=\alpha$, $z_N=\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P=\alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer $z_N{}^3$ et $z_P{}^3$.

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q=\alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à ($\alpha^3=-2\alpha$).

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.

Exercice 4 😊

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1 ; 1 ; 1)$ et $B(3 ; 2 ; 0)$;
- le plan *(P)* passant par le point *B* et admettant le vecteur $\vec{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan *(Q)* d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère *(S)* de centre *A* et de rayon *AB*.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan *(P)* est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. Déterminer une équation de la sphère *(S)*.

3. a) Calculer la distance du point *A* au plan *(Q)*
En déduire que le plan *(Q)* est tangent à la sphère *(S)*.

b) Le plan *(P)* est-il tangent à la sphère *(S)* ?

4. On admet que le projeté orthogonal de *A* sur le plan *(Q)*, noté *C*, a pour coordonnées $(0 ; 2 ; -1)$

a) Prouver que les plans *(P)* et *(Q)* sont sécants.

b) Soit *(D)* la droite d'intersection des plans *(P)* et *(Q)*

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite *(D)* est : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathrm{IR}$

c) Vérifier que le point *A* n'appartient pas à la droite *(D)*