Probabilités et variables aléatoires

Rappels :

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ >0)

Pour tous réels a et b positifs, on a :

p(X≤ a)= $\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda a}$

p(X≥ a)= $e^{-\lambda a}$

p(a ≤X≤ b)= $\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

p($X > a + b / X > a$)=p($X > b$)

L'espérance mathématique et la variance de X dans ce cas : E(X)= $\frac{1}{\lambda}$ et V(X)= $\frac{1}{\lambda^2}$

EXERCICE N1 :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Déterminer , arrondi à 0,1 prés, pour que la probabilité p(X$>$ 6) soit égale à 0,3

■ Pour la suite de l'exercice, on prendra λ =**0,2.**

2) Quelle est la probabilité qu'un robot n'a pas eu de panne au cours de la première année et tombe en panne pour la première fois au cours des deux années suivantes.

3) Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est (à 10^{-2}prés) la probabilité qu'il soit encore en état de marche six ans de plus ?

5) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

a) Déterminer la probabilité que dans ce lot, il y ait exactement trois robots qui n'aient pas eu de panne au cours des deux premières années.(On peut considérer la variable aléatoire Y qui indique le nombre de robot n'ayant pas eu de panne au cours des deux premières années.

b) Déterminer la probabilité que dans ce lot, il y ait au plus neuf robots qui n'aient pas eu de panne au cours des deux premières années.

EXERCICE N2:

La durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ; avec $\lambda > 0$.

Une étude statistique permet de supposer que la probabilité qu'un composant électronique n'ait pas eu de panne durant 200 semaines est égale à 0,5.

1) Montrer que λ=$\frac{\ln 2}{200}$

2) Quelle est la probabilité qu'un composant n'est plus fonctionnel après 300 semaines.

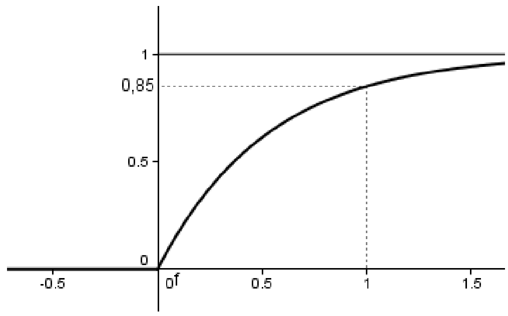
3) Quelle est la probabilité qu'un composant n'ait pas eu de panne avant 200 semaines et pouvait rester en état de marche 100 semaines de plus au maximum.

4) Sachant qu'un composant a déjà fonctionné 200 semaines, Calculer la probabilité qu'il fonctionne encore 100 semaines de plus.

5) On considère un lot de 10 composants électroniques, fonctionnant de manière indépendante. Calculer la probabilité que dans ce lot il y ait au moins un composant qui n'ait pas eu de panne durant 200 semaines.

EXERCICE N3:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité exponentielle p de paramètre λ. Voici la courbe représentative de sa fonction de répartition F.



1) A l'aide du graphique déterminer λ.

2) Calculer F(1,5). En déduire p(1<X<1,5)

3) On sait que X est supérieure à 1. Quelle est la probabilité que X soit supérieure à 2,5 ?

Rappels :

Soient a et b deux réels tels que a<b. Une variable aléatoire continue X suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ si sa densité de probabilité f est définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $\forall\, x \in [a,b]$ et $f(x) = 0\ \forall\, x \notin [a,b]$

- Par conséquent : $p(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$ $\forall\, c$ et d dans l'intervalle $[a,b]$
- L'espérance mathématique et la variance de X dans ce cas : $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

EXERCICE N4:

On suppose que la durée (en minutes) du trajet qui sépare un employé de son travail est une variable aléatoire T à valeurs dans $[30,50]$ qui suit une loi de probabilité uniforme.

1) Calculer la probabilité que l'employé parcours ce trajet entre 35 et 40 minutes.

2) Calculer la probabilité que l'employé parcours ce trajet en exactement 37 minutes.

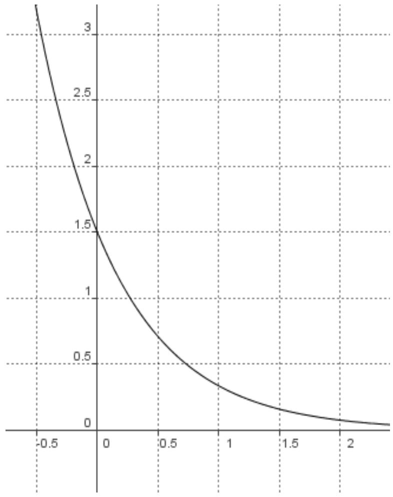
3) Calculer la probabilité que l'employé parcours ce trajet en une durée moins que 40 minutes.

4) L'employé a parcouru ce trajet en une durée plus que 35 minutes. Calculer la probabilité que cette durée ne dépasse pas 45 minutes.

EXERCICE N5:

A/ Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.($\lambda > 0$)
La courbe ci-contre représente la fonction densité f associée à X. ($f: t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}$)

1) Interpréter graphiquement la probabilité p(X≤ 1).
2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.



B/ Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart X, en dixième de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ =1,5.

- Si l'écart X≤ 1, alors le cylindre est accepté.
- Si l'écart $1 \leq$X$\leq$2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas.
- Si l'écart X$\geq$2, alors le cylindre est refusé.

■ On prélève au hasard un cylindre dans la production.

1) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est sensiblement égale à 0,915.
2) Sachant qu'il est accepté. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
3) On considère un lot de dix cylindres, pour mesurer à chacun l'écart X. On effectue Ces mesures de façon indépendante. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit accepté ?

C/ Le temps d'attente T (exprimé en années) de la première panne de cette machine-outil suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

1) Calculer la probabilité que cette machine-outil fonctionne six mois.
2) Sachant que cette machine outil n'a pas eu de panne durant six mois. Calculer la probabilité quelle fonctionne encore deux ans au moins.