

Sujet n°4

EXERCICE 1 : (Bac principale 2017)

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.

On désigne par U et D les évènements suivants :

U : « la femme a une grossesse unique ».

D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

- 1) a) Déterminer $p(U)$
b) En utilisant les évènements U et D, traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.
- 2) a) Calculer $p(D)$.
b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.
- 3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ($n \geq 2$).
On note p_n la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.
a) Exprimer p_n en fonction de n.
b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 2 : (Bac 2016)

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

- 1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :

Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.

- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit A_n l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{\text{ième}}$ choix » et p_n sa probabilité.

- a) Justifier que $n \leq 4$.
- b) Calculer p_1 et p_2 .
- c) Montrer que $p_3 = \frac{7}{120}$ et que $p_4 = \frac{1}{120}$.
- 2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.
- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Calculer l'espérance mathématique de X .
- 3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
- a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de λ et T .
- b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0,7$.
- c) On prend $\lambda = 0,071$.
- Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

EXERCICE 3 : (Bac 2016)

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A .

- 1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.
- a) Donner, en fonction de θ , l'écriture exponentielle des nombres complexes a , \bar{a} , a^2 et \bar{a}^2 .
- b) Construire sur l'annexe les points B , C et D d'affixes respectives \bar{a} , a^2 et \bar{a}^2 .
- 2) a) Justifier que $a + \bar{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- b) Montrer que a et \bar{a} sont les solutions de l'équation (E): $z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.
- 3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z ,
- $$z^5 - 1 = (z-1) \left[z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 \right] \left[z^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z + 1 \right].$$
- b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.
- 4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.
- b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.
- c) En déduire que $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
- 5) Soit I le point d'affixe 1.
Montrer que les points I , A , C , D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.
b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3) Tracer la courbe (C).
- 4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.
b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J. Calculer $(f^{-1})'(1)$
c) Tracer dans le même repère la courbe (C') de f^{-1}
d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$
et voici ci-contre son tableau de variation sur $[0, 1]$ et (a_n)
une suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$

- 1) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < a_n \leq 1$
b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
 - a) Calculer : u_0 et v_0
 - b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L.
 - c) Montrer que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$

