Sujet n°2

EXERCICE 1 : (Bac 2017)

A/ 1) a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2}\,i$ et $z_D = 2\sqrt{2}\,i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$$z_B = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_C = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) Vérifier que $z_B = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC) \perp (AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes

respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer $z_N{}^3$ et $z_P{}^3$.

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à $(\alpha^3 = -2\alpha)$.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.

EXERCICE 2 :

Pour tout réel $\theta \in]0,\pi[$ on considère l'équation $(E_\theta): z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1) a) Montrer que : $1 + 2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2) On donne $f(z)=z^3-4z^2+\left(4-2i\sin\theta e^{i\theta}\right)z+4i\sin\theta e^{i\theta}$

a) Calculer $f(2)$

b) Montrer que $f(z)=(z-2)\left(z^2+bz+c\right)$ ou b et c deux nombres complexes à déterminer.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.On désigne par A, B, et C les points d'affixes 2 , $1-e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$

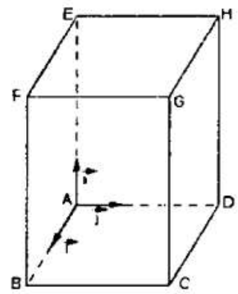
a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C

b) Montrer que OABC est un rectangle

c) Déterminer θ pour que OABC soit un carré

EXERCICE 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{AE}=4\vec{k}$.



1) Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}$ est égal à :

a) $-8\,\vec{k}$ b) $-8\,\vec{i}$ c) $-8\,\vec{j}$

2) Soit P le plan (FHC). La droite (BD) est :

a) Strictement parallèle à P b) Perpendiculaire à P c) Contenue dans P

3) Le produit mixte $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)$ est égal à :

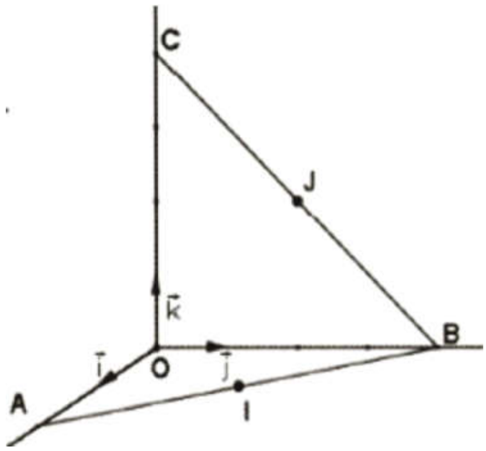
a) 0 b) -24 c) 24

4) L'intersection de la sphère S de centre A et de rayon 4 avec le plan Q d'équation cartésienne $y=3$ est le cercle :

a) de centre C et de rayon $\sqrt{7}$. b) de centre D et de rayon $\sqrt{7}$. c) de centre D et de rayon 4.

EXERCICE 4 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A(2,0,0), B(0,4,0) et C(0,0,4) et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant MI=MJ

a) Identifier le plan P et montrer qu'il a pour équation : $2x-4z+3=0$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan P avec les axes $(O,\vec{\imath})$, $(O,\vec{\jmath})$ et $(O,\vec{k})$.

3) a) Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire du triangle ABC.

b) En déduire la distance du point O au plan (ABC).

4) On désigne par v le volume du tétraèdre OIBJ.
Sans calculer v, montrer que $V = 4.v$

EXERCICE 5 **:(Bac 2017)**

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left(1+x^2\right)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-(x-1)^2 e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point J d'abscisse 0.

b) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3.

Montrer que A et B sont deux points d'inflexion de (C).

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- (Γ) est la courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de la fonction g définie sur IR par $g(x)=e^x$.
- E et F sont les points de (Γ) d'abscisses respectives (-1) et $\ln 10-3$.
- G est le point de coordonnées $(0\ ,\ 1-6e^{-3})$.

a) Exprimer $f(1)$ en fonction de $g(-1)$ et $f(3)$ en fonction de $g(-3)$.

b) En remarquant que $10\,g(-3)=g(\ln 10-3)$, placer les points A et B dans l'annexe.

5) a) Soit K le point de coordonnées $(\frac{11}{2}, 0)$.

Montrer que la droite (BK) est la tangente à la courbe (C) au point B.

b) Tracer la courbe (C) dans l'annexe (On placera les tangentes à (C) en A, en J et en B).

6) Soit S l'aire en (u.a) de la partie E du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x=0$ et $x=3$.

a) Hachurer E .

b) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x)=-\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur IR.

c) Calculer S.

d) Vérifier que la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0,3] est égale à $1-6e^{-3}$.

e) Tracer dans la **figure 2** un rectangle d'aire égale à S.

Figure 2