Les intégrales - Logarithme népérien
Géométrie dans l'espace

Séance 3

## EXERCICE 1 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère le plan $P_m$ : $2x - y + 2z + m = 0$ ; (m étant un paramètre réel).
Soit l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et le centre $\Omega$.
2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de (S) et le plan $P_m$
3) a) Caractériser l'intersection de la sphère (S) et le plan $P_3$.
   b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans Q et Q' tangents à (S) et parallèles au plan $P_3$.

## EXERCICE 2 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et $\Omega(-1,2,2)$.

1) Soit l'ensemble P des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$
   a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.
   b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
2) Calculer $\overrightarrow{A\Omega}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ . En déduire que $\Omega \notin P$.
3) Montrer que le point $\Omega$ appartient à l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
4) Soit S la sphère de centre $\Omega(-1,2,2)$ et de rayon $R= \sqrt{2}$.
   a) Ecrire une équation cartésienne de S.
   b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle $\mathcal{C}$.
   c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

## EXERCICE 3 :

On pose pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$

1) a) Vérifier que $I_2 = \frac{8}{15}$
   b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a :
   $I_{n+1} = (2n + 2) \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n \, dx$
   c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$
2) On considère les deux fonctions F et G définies sur IR par :
   $F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^n dt$ et $G_n(x) = \int_0^x (\cos t)^{2n+1} \, dt$
   a) Montrer que $f$ et $g$ sont dérivables sur IR et calculer $F_n'(x)$ et $G_n'(x)$ pour tout $x \in IR$
   b) En déduire que pour tout réel $x$, on a : $F_n(x) = G_n(x)$
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^7 \, dt$

## EXERCICE 4 :

1) Simplifier chacune des expressions suivantes :
   a) A= $\ln 60 + \ln 20 - 2. \ln 10$
   b) B= $2\ln\left(a^3\sqrt{b}\right) + \ln\left(\frac{a}{b^4}\right) - 4\ln(b^3)$ ; $a > 0$ et $b > 0$

2) Résoudre dans IR :

$2lnx-8=0$ , $1+2ln(x-1)=0$ , $2lnx+6\leq 0$ et $2-4ln(x+3)\leq 0$

## EXERCICE 5 :

Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2lnx$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{\sqrt{x}}$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4}{ln\,x}$ ;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln(x-2)}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-x)lnx$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x.lnx-x^2)$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\,(\sqrt{x})}{x}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{(x-1)^3}$ ;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\,(x^2+1)}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} x.ln\,(1+\frac{1}{x})$

## EXERCICE 6 :

Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_1^e x.lnx\,dx$ ; $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx$ ; $\int_e^{e^2}\frac{1}{x.lnx}dx$ ;

$\int_e^{e^2}\frac{1}{x.\sqrt{lnx}}dx$ ; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx\,dx$ et $\int_1^e (lnx)^2\,dx$

## EXERCICE 7 :x

On pose pour tout $n\in$ IN$^*$, $u_n=\int_1^e (lnx)^n.dx$

1) a) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et que $u_n\geq 0$ pour tout n∈ IN

b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

2) Á l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n∈ IN, $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$

3) a) En tenant compte des questions 1)a) et 2) , montrer que $\frac{e}{n+2}\leq u_n\leq\frac{e}{n+1}$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n$.

4) Soit la fonction $f: x\longmapsto (lnx)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Montrer que $u_1=1$. En déduire $u_2$ et $u_3$.

b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de $(O,\vec{\imath})$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

## EXERCICE 8 : x

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A/** Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x)=x^2(a+b.lnx) \\ f(0)=0 \end{cases}$ (où a et b sont deux réels).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On suppose que la courbe représentative (C) de $f$ passe par le point A(1,1) et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation : $y=x$

1) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

2) En déduire les valeurs de a et b.

**B/** Dans la suite on prend : $\begin{cases} f(x)=x^2(1-lnx) \text{ pour tout } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Calculer $f_d'(0)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au V(+∞) qu'on précisera.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses.

4) a) Etablir le tableau de variation de la fonction $h: x\longmapsto x-xlnx-1$

b) En déduire alors la position de (C) par rapport à T.

5) Tracer la tangente T et la courbe (C).