Les fonctions exponentielles

Séance 1

EXERCICE 1 :

1) Ecrire chacune des expressions suivantes sous forme $e^{u(x)}$:

a) $\frac{(e^{x-3}.\ e^{2-x})^2}{e^{1-x}}$ b) $(e^{2x-1})^3 . e^{4-6x} . e$

2) Développer chacune des expressions suivantes :

$A(x) = e^{-x}(3e^{2x} - e^x + xe^{-x})$ et $B(x) = (e^x + e^{-x}).(e^x - e^{-x})$

3) Factoriser par e^x chacune des expressions suivantes :

$E(x) = e^{3x} - 2e^x + 1$ et $F(x) = e^x - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$

4) Montrer les relations suivantes :

$ln(1 + e^x) = x + ln(1 + e^{-x})$; $x \in IR$

EXERCICE 2 :

Pour chacune des propositions suivantes une seule réponse est correcte, préciser la :

1) Le réel $e^{-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}$ est égal à :

a) $\frac{1}{e}$ **b)** e **c)** 1

2) Le réel $e^{\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]}$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $-\sqrt{2}$

3) Le réel $e^{(x+3\ln x)}$ est égal à :

a) $3xe^x$ **b)** $e^x + x^3$ **c)** x^3e^x

EXERCICE 3:

Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes:

a) $2e^{|3x-1|} - 3 = 0$ c) $\sqrt{4e^{3x-1} - 2} = 1$

b) $3e^{2x^2} + e^{x^2} - 2 = 0$ d) $\frac{1-3e^x}{2e^x-3} \geq 1$

EXERCICE 4:

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+3e^x+1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2)$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + e^{-3x})e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{4x} - 3e^x + x^2)$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}})$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

EXERCICE 5:

Vérifier dans chacun des cas suivants que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$:

a) $f : x \mapsto x^2 . e^x$; I= IR c) $f : x \mapsto e^{x^2+x}$; I= IR

b) $f : x \mapsto e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$; I= $]0, +\infty[$ d) $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$; I= IR

e) $f : x \mapsto 2^x$; I= IR

EXERCICE 6:

Calculer (au moyen d'une primitive) chacune des intégrales suivants :

$\int_0^{\ln 2}(e^{4x}+2e^{-x})dx$; $\int_0^1 x^2 e^{(x^3+1)}dx$; $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; $\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx$

EXERCICE 7:

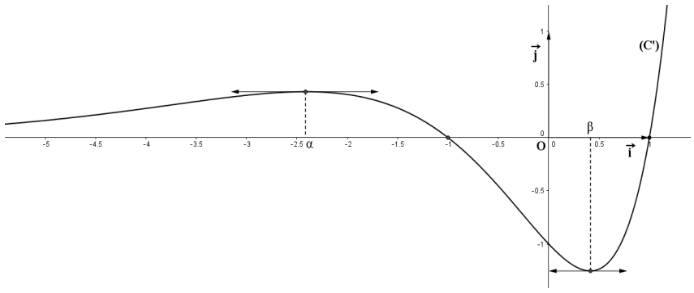
Soit La fonction f définie sur IR\{0} par : $f(x) = ln\,(1+e^{\frac{1}{x}})$

1) Montrer que f est dérivable sur IR\{0} et que : $f'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})}$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]ln2,+\infty[$

b) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{1}{ln\,(e^x-1)}$ $\forall\ x \in\ ]\ln 2,+\infty[$.

EXERCICE 8:



Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par $f(x)= (ax+b)^2.e^x$, où $a>0$ et $b<0$.
La courbe (C') admet une asymptote d'équation : y =0 au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe $(O,\vec{j})$.

I/ 1) A l'aide des valeurs graphiques de $f'(0)$ et $f'(-1)$, montrer que $a=1$ et $b=-1$

2) Par une lecture graphique :

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion A et B.

II/ 1) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Vérifier que $f(x)-f'(x)=(2-2x)e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C').

3) Tracer (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\alpha=-1-\sqrt{2}$ et $\beta=-1+\sqrt{2}$)

III/ 1) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C'),l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=1$.

2) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C),(C') et les droites d'équations $x=-2$ et $x=1$.

EXERCICE 9:

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend comme unité graphique 1cm)

1) Etablir le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I(0,2) est un centre de symétrie de (C).

b) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point I.

3) a) Vérifier que $(e^x+1)^2 \geq 4e^x$. En déduire que $f'(x)\leq 1$

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans IR et que $< \alpha <$

4) Tracer $\Delta : y=x$, (C) et T.