Problèmes de révision

Séance 4

Problème1:

1. On considère la fonction $\varphi(x)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x)=\tan x$.

   (a) Montrer que φ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervale J que l'on déterminera .

   (b) Note g la fonction résiproque de φ ,Montrer que g dérivable sur J et que $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

   (c) Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[\ : g(x)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}\ g(x)$.

   (a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\ g\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

   (b) En déduire que la droite d'équation: $y=\pi x-2$ est une asymptôte oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$, est que $f'(x)>2$ pour tout $x>0$.

   (b) En déduire que pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant x$.

   (c) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

4. Montrer que f^{-1} dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $0<\left(f^{-1}\right)'(x)<\dfrac{1}{2}$, pour tout $x\in]0;+\infty[$.

5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\in]0;1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$.

   (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0<u_n<1$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) décroissante .Et déduire qu'elle est convergente .

   (c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $u_n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ .Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Problème 2:

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\sqrt{tgx}$

1) Etudier la dérivabilité de f a droite en 0 . Interpréter graphiquement ce résultat .

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   On note g la fonction réciproque de f .

3) Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$

4) a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$; $g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

   b) En déduire que $\forall\, x\in IR$: $g\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+g\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ est une constante que l'on précisera .

5) Soit $n\in IN^*$. On pose $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=o}^{n} g\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$.

   a) montrer que pour tout n de IN^* on a : $\frac{n+1}{n}\ g\left(1+\frac{1}{2n}\right)\leq U_n\leq\frac{n+1}{n}\ g\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   b) En déduire la limite de la suite (U_n) .

   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(1-\frac{1}{n+k+1}\right)$