

EXERCICE 1 :

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_0) : y' - 2y = 0 \text{ et } (E) : y' - 2y = e^{2x}$$

- 1) Déterminer les fonctions g solutions de l'équation (E_0) .
- 2) Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = a \cdot x \cdot e^{2x} + b$ où a et b sont deux réels tels que h soit solution de l'équation (E) .
Déterminer les valeurs de a et b .
- 3) Montrer qu'une fonction f soit solution de l'équation (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation (E_0) .
- 4) En déduire la solution f de l'équation (E) qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE 2 :

On désigne par (E) l'équation différentielle $y'' = -3y' + 1$

- 1) En posant $z = y'$, résoudre (E) sur \mathbb{R} .
- 2) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$

EXERCICE 3 :

- 1) Vérifier que la fonction $u : x \mapsto 2$ est une solution de l'équation différentielle :
 $y' + 2y = y^2$
- 2) Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} , qui ne s'annulent pas sur \mathbb{R} et telles que : $f'(x) + 2f(x) = (f(x))^2$ pour tout réel x .
 - a) Vérifier que l'ensemble E est non vide.
 - b) Soit f une fonction de E . Montrer que la fonction $g = \frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels.
 - c) Déterminer alors E .

EXERCICE 4 :

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$.
- 2) On désigne par f la solution particulière de l'équation (E) , dont la courbe représentative selon un repère orthogonal passe par le point $H(1, -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
 - a) Déterminer f .
 - b) Ecrire $f(x)$ sous la forme $r \cdot \cos(ax + b)$ puis vérifier que f est périodique de période 6.
 - c) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[335, 341]$.

EXERCICE 5 :

On considère les équations différentielles suivantes $(E_0) : y'' + 4y = 0$
et $(E) : y'' + 4y = 3 \cdot \cos x$

- 1) a) Déterminer la solution g de (E_0) telle que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
b) Ecrire $g(x)$ sous la forme $r \cdot \sin(2x - \alpha)$ où α est un réel.

- 2) Vérifier que la fonction $h : x \mapsto \cos x$ est solution de (E).
- 3) Vérifier que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de (E).
- 4) Montrer qu'une fonction p soit solution de (E) si et seulement si $p - h$ est solution de (E_0) .
- 5) En déduire la fonction p solution de (E) telle que $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $p'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

EXERCICE 6 :

- 1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = 0$
- 2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$
 - a) Vérifier que la fonction $g : x \mapsto \cos x$ est un élément de E.
 - b) Soit f un élément de E. Vérifier que pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
 - c) En déduire que si f est un élément de E, alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$
 - d) Déterminer alors l'ensemble E.

EXERCICE 7 :

On considère les équations différentielles :

$$(E_0): (1 + e^x)y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (E): (1 + e^x)y' - y = e^{2x}$$

- 1) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ Montrer que g est une solution de (E) sur \mathbb{R} .
- 2) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .
- 3) On pose $z = (1 + e^x)y$
 - a) Montrer que si y est une solution de (E_0) sur \mathbb{R} alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.
 - b) En déduire que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions f définies par : $f(x) = \frac{ke^x + e^{2x}}{1+e^x}$; $k \in \mathbb{R}$.
- 4) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x}{1+e^x}$ Etudier les variations de f .
- 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
 - a) Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h , expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- 6) a) Tracer dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes de f et de h^{-1} .
b) Calculer $\int_{-1}^0 \ln(3 + x + \sqrt{x^2 + 10x + 9}) dx$