# Les intégrales – Les coniques

Séance 3

## EXERCICE 1 :

On pose pour tout $n \in$IN, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

1) Calculer $I_0$

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a :$0 \leq \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$, En déduire que

pour tout $n \in$IN, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$

b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathrm{I}_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2).\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

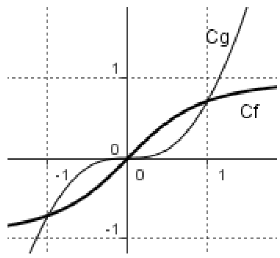
b) En déduire que $\forall\, n \in$IN, on a : $(2n+3).I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2).I_n$

c) Calculer alors $\mathrm{I}_1$

4) Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur IR par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

et $g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$

On a représenté ci-contre leurs courbes dans un repère orthonormé d'unité 2cm. Calculer en cm$^2$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.




## EXERCICE 2 :

Soit F la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $\mathrm{F}(x) = \int_1^{\tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in ]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $\mathrm{F}'(x) = 2$

2) Calculer $\mathrm{F}(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in ]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $\mathrm{F}(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

3) a) Calculer alors I= $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer J=$\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt$

## EXERCICE 3:

On pose $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$

1) Montrer que $g$ est définie sur IR$^+$.

2) Montrer que $g$ est dérivable sur IR$^+$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in IR^+$.

3) a) Montrer que $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est décroissante sur $IR^+$.

b) En déduire que : $\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}} \leq g(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ $\forall\ x \geq 0$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

## EXERCICE 4:

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit la courbe $(\Gamma)$ dont une équation est : $y^2 + 2y - 4x + 3 = 0$.

1) a) Montrer que $(\Gamma)$ est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b) Tracer $(\Gamma)$.
2) Soit le point A(-1,1). Déterminer par leurs équations les tangentes (T) et (T') à la parabole $(\Gamma)$ menées du point A, dont on précisera leurs points de contact avec $(\Gamma)$.

## EXERCICE 5 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la conique (C) d'équation : $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$

1) Montrer que (C) est une hyperbole dont on précisera le centre $\Omega$, les directrices, les sommets et les asymptotes. Tracer (C).
2) Soit les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$
   Donner une équation de (C) dans le repère $\mathfrak{R}' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

## EXERCICE 6 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $f$ la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ .

1) Déterminer la forme complexe de $f$.
2) Une courbe (C) a pour équation : $15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy - 768 = 0$
   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par $f$.
   b) En déduire que (C') est une ellipse que l'on caractérisera. Tracer (C').
3) Déterminer alors la nature de la courbe (C) et préciser ses caractéristiques.

## EXERCICE 7 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $(E)$ la conique dont le point $F(\sqrt{3}, 0)$ est l'un de ses foyers, le point S(2,0) est l'un de ses sommets et la droite D : $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ est l'une de ses directrices.

1) Montrer que $(E)$ est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.
2) Montrer que la droite (T) : $x\sqrt{3} + 2y = 4$ est une tangente à $(E)$ en un point A que l'on précisera.