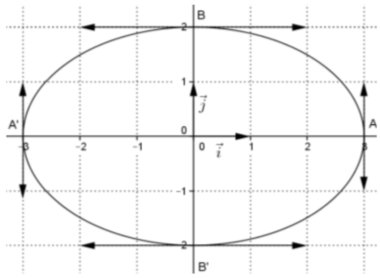
Les intégrales - Les coniques

Séance 4

EXERCICE 1 :

I/ Soit D une droite et F un point du plan n'appartenant pas à D. On note H le projeté orthogonal de M sur D. L'ensemble Γ des points M du plan tels que MF=(ln2).MH est :

a) une parabole **b)** une hyperbole **c)** une ellipse



II/ On donne dans le graphique ci-contre une ellipse $\mathcal{E}$.

1) L'ellipse $\mathcal{E}$ admet pour équation :

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ **b)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ **c)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

2) L'un des foyers de l'ellipse $\mathcal{E}$ est le point :

a) $F(0,\sqrt{5})$ **b)** $F(\sqrt{13},0)$ **c)** $F(\sqrt{5},0)$

3) L'une des directrices de l'ellipse $\mathcal{E}$ est la droite :

a) $D : y=\frac{4}{\sqrt{5}}$ **b)** $D : x=\frac{9}{\sqrt{5}}$ **c)** $D : x=\frac{4}{\sqrt{5}}$

III/ 1) L'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O, de foyer F(5,0) et de directrice $D : x=\frac{9}{5}$ a pour équation :

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **b)** $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ **c)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

2) La courbe d'équation $|x^2-y^2|=1$est :

a) une hyperbole **b)** la réunion de deux hyperboles **c)** la réunion d'une ellipse et d'une hyperbole

3) L'une des directrices de l'hyperbole $\mathcal{H}$: $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ est la droite :

a) $D : x=\frac{9}{5}$ **b)** $D : y=\frac{16}{5}$ **c)** $D : y=\frac{4}{5}$

EXERCICE 2 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit P la parabole de foyer O et de directrice D d'équation $x=-2$.

1) a) Montrer qu'une équation de P est $y^2=4x+4$

b) Tracer la parabole P. On notera S son sommet

2) Soit le point $A(-2,\frac{3}{2})$.

Déterminer, par leurs équations, les deux tangentes T et T' à P issues de A dont on précisera les coordonnées de leurs points de contact. .

EXERCICE 3 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\mathfrak{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la conique $(\mathcal{H})$d'équation : $4x^2-9y^2+16x+18y-29=0$

1) Montrer que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole dont on précisera le centre Ω, un foyer F, la directrice D associée à F, les sommets et les asymptotes. Tracer $(\mathcal{H})$.

2) Etablir une équation de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ rapporté à ses asymptotes.

EXERCICE 4 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit (E) la conique dont le point $F(\sqrt{3}, 0)$ est l'un de ses foyers, le point $S(2,0)$ est l'un de ses sommets et la droite $D : x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ est l'une de ses directrices.

1) Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.
2) Montrer que la droite (T) : $x\sqrt{3} + 2y = 4$ est une tangente à (E) en un point A que l'on précisera.

EXERCICE 5 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x, y)$ tels que :

a) $y = 2.t^2$ et $x = t$; t décrit l'ensemble $IR \setminus \{1\}$

b) $x = 5cos\,\theta$ et $y = 3sin\theta$; θ décrit l'ensemble IR

EXERCICE 6 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Soit le point $M(cos\theta, 2sin\theta)$, où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.
   b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.
   c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.
2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.
   Montrer qu'une équation de (T) est $2xcos\theta + ysin\theta - 2 = 0$
3) On désigne par P et Q les points d'intersection de (T) et les axes du repère et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.
   a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$
   b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu de [PQ].
4) Soit S le solide de révolution de l'arc ABA' où A et A' sont les sommets de $(\mathcal{E})$ sur l'axe focal et B est celui de l'axe non focal d'ordonnée positif.
   a) Définir la fonction f représentée par l'arc ABA' dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) Calculer alors le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $(0, \vec{\imath})$ de l'arc ABA'.

EXERCICE 7 :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On pose pour tout entier $n > 0$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $I_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,dx$

1) a) Vérifier que f est décroissante.
   b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\frac{1}{1+n^2} \leq I_n \leq 1$
3) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dx \leq f(k)$
   b) Montrer alors que pour tout entier $n > 0$, $S_n - 1 \leq I_n \leq S_n - \frac{1}{1+n^2}$
   c) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{n+1}{n(1+n^2)} \leq S_n \leq 2$
   d) Dire alors pourquoi (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite L.