Sujet de révision

Séance 1

EXERCICE N1:

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ $par:\ f(x)=-tg(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ $sur\ \ IR$.

2) Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur IR et que $\forall\, x\in IR\ ,\ h'(x)=\dfrac{-1}{\pi(1+x^2)}$.

3) Soit φ la fonction définie sur $[0;1[$ $par:\ \varphi(x)=h\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0;1[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x\in[0;1[$.

b) En déduire que $\forall x\in[0;1[\ ,\ \varphi(x)=h(x)-\dfrac{1}{4}$.

4) Soit g la fonction définie sur $[0;1[$ par : $g(x)=\varphi(x)-(1+2x)h(x)$.

a) Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0;1[$ et calculer g '(x) et g ''(x).

b) Etudier les variations de g ' sur $[0;1[$ puis déduire celle de g.

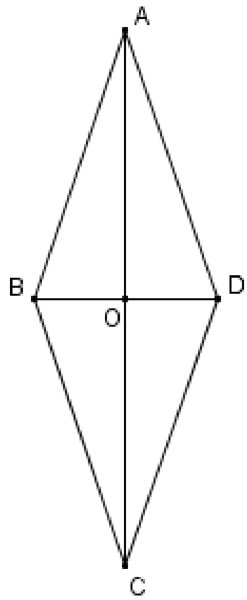
c) En déduire qu'il existe un unique réel $c\in\,]0;1[$ tel que $c=tg\left(\dfrac{\pi}{8c}\right)$.

5) Soient U et V les suites définies sur IN*_{1} par : $U_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}h\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $V_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}h\left(1-\dfrac{2}{1-k}\right)$.

a) Déterminer un encadrement de U_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

b) Montrer que $V_n=U_n-\dfrac{1}{4}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

EXERCICE N2:



Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC=3BD.

1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b) Montrer que O est le centre de f.
2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA=9OD'
   b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

3) Soit g =f o $S_{(AC)}$

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

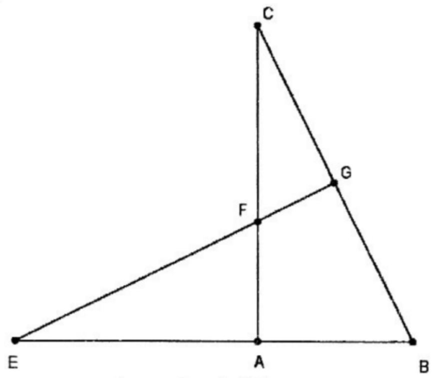
d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q. Montrer que MQ=3NP

EXERCICE N3:

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que AB $<$ AC.

La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.



1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).

c) Déterminer $f(C)$.

2) Le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[EF]$ se coupent en A et H.

a) Montrer que $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) Soit $I = f(H)$. Construire le point I.

c) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

d) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F) = J$.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que $g(B) = F$.

a) Montrer que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b) Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).

c) Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.