Dérivabilité - fonction réciproque
Suites réelles

Séance 2

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{4}[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-\tan(x)}$

1)a) Etudier les variations de f

b) Déduire que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f et la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans un même repère orthonormé

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout x de J , on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2x^2-2x+1}$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f(x) = n$, admet dans I une solution unique notée x_n

b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)$

EXERCICE 2:

Soit f la onction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \dfrac{2\sin x}{1-\sin x}$

(C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I ,J)

1. Etudier f et tracer (C).(préciser la demi-tangente en 0)

2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0\ ;+\infty[$.Déterminer g(0) et g(2)

   b. Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .en déduire la position de (C') par rapport à la droite $\Delta : y = x$

   c. Montrer que g est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

3. Soit (u_n) la suite definie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$

   b. Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

4. Soit (v_n) la suite definie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = n\left[g\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - g\left(u_n + \frac{1}{n}\right)\right]$

   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in \left]u_n + \frac{1}{n}\ ;\ u_n + \frac{2}{n}\right[$ tel que $v_n = \dfrac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

   b. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3:

On considère pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur I= $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f_n(x) = \sqrt[n]{tanx}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_n'(x) = \frac{(1+tan^2x).f_n(x)}{n\ tanx}$

c) Montrer que f_n réalise une bijection de I sur IR_+.

2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = n - 1$ admet une unique solution α_n dans I.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $tan(\alpha_n) = (n-1)^n$

3) a) Vérifier que $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ et montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\alpha_n \geq \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $f_n(\alpha_{n+1}) \geq f_n(\alpha_n)$. En déduire que la suite (α_n) est croissante et convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} tan(\alpha_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

3) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} \alpha_k$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\alpha_n \leq S_n \leq \alpha_{2n}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4) Montrer que la fonction ${f_n}^{-1}$ (fonction réciproque de f_n) est dérivable sur IR_+ et que pour tout $x \geq 0$, on a : $\left({f_n}^{-1}\right)'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$