

# Dérivabilité d'une fonction

## Les déplacements et les antidéplacements

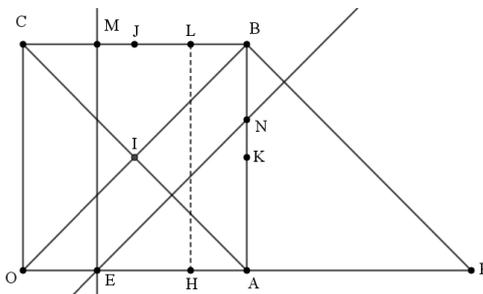
Séance 3

### EXERCICE 1:

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un carré OABC de centre I tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Soit J le milieu de [BC], K le milieu de [AB], L le milieu de [BJ] et H le projeté orthogonal de L sur [OA].

Soit E le point de [OA] distinct de O et de A. La parallèle à la droite (OC) passant par E coupe [BC] en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe [AB] en N.

- 1) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  qui envoie C sur B et M sur N.
- 2) a) Montrer que  $f$  est une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .  
 b) Montrer que  $f(B)=A$ .  
 c) En déduire que I est le centre de la rotation  $f$ .
- 3) a) Montrer que  $f \circ S_{(AC)}$  est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.  
 b) En déduire que  $S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)}$  est une translation dont on précisera le vecteur.
- 4) Soit  $g$  l'antidéplacement qui envoie C sur B et M sur N.  
 a) Montrer que  $g(B)=A$ . (On pourra se servir de l'isométrie  $g \circ S_{(MC)}$ )  
 b) En déduire que  $g$  est une symétrie glissante dont on déterminera le vecteur et l'axe.  
 c) Soit P le point tel que ACBP soit un parallélogramme. Montrer que  $g(A)=P$
- 5) Montrer que  $f \circ g$  est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.



### EXERCICE 2:

Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle direct en A tel que  $AC = 2 \cdot AB$ . Soit I le milieu de [AC].

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  qui envoie A en I et B en C.  
 b) Montrer que  $f$  est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre  $\Omega$ .
- 2) Soit  $R$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $g = f \circ R^{-1}$   
 Déterminer  $g(A)$ . En déduire que  $f = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$
- 3) Soit  $E = R(I)$  et F le point tel que AEFI soit un carré. (Construire E et F)  
 a) Caractériser l'application  $f \circ f$ .  
 b) Déterminer  $f \circ f(A)$ . En déduire que  $\Omega = A * F$
- 4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement  $h$  qui envoie A en F et E en I.  
 b) Montrer que  $h$  est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.  
 (On donne K le milieu de [FI])

### EXERCICE 3:

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative .

- 1) a) Etudier la continuité de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  .  
b) Montrer que la droite d'équation  $y = x$  est une asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$  .
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite en 1.  
b) Interpréter géométriquement les résultats trouvés en 3.a).
- 4) Calculer  $f'(x)$  sur chacun des intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Soit  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
a) Montrer que  $h$  est dérivable sur  $]0, 1[$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $h$ .

### EXERCICE 4:

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et dont la fonction dérivée  $f'$  varie comme l'indique le tableau ci-contre :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'$	-1	2	0

Répondre par **vrai** ou **faux**

1. La courbe de  $f$  admet deux tangentes horizontales.
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe de  $f$ .
3. Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a  $|f(a) - f(b)| \leq 2|a - b|$ .
4. Si  $f'(0) = f(0) = 1$  alors  $(f \circ f)'(0) = 2$ .

### EXERCICE 5:

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$   
b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $1 < \alpha < \sqrt{2}$
- 3) Montrer que  $\forall x \in [1, +\infty[$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 4) Soit la suite réelle  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$   
a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \geq 1$ .  
b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$   
c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Calculer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$